UNIVERSIDAD DE PANAMA

VICERRECTORIA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO

PROGRAMA DE MAESTRIA EN MATEMATICA

UN ENFOQUE AL PROBLEMA DE TRANSPORTE

GUADALUPE DEL CARMEN MELO LERMA

TESIS PRESENTADA COMO UNO DE LOS REQUISITOS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGISTER EN MATEMATICA CON OPCIÓN EN INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

PANAMA, REPUBLICA DE PANAMA

2011

Vicerrectoria de Investigacion y Postgrado

Facultad de Ciencias Naturales Exactas y Tecnologia
Programa de Maestria en Matematica

TESIS
Sometida para optar al titulo de Maestria en Matematica
con Opcion en Investigacion de Operaciones

. estudiante **Guadalupe del Carmen Melo Lerma, Cedula N° 8 284-646**

Titulo de la Tesis

Un Enfoque al Problema de Transporte

OBADO POR

Doctor Jose del Rosario Garrido
Presidente

Maria Luisa Q

Magister Maria Luisa Paz
Miembro

Eyda Nekelda Jimenez

Magister Eyda Nekelda Jimenez
Miembro

RENDADO POR

REPRESENTANTE DE LA VICERRECTORÍA
DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO

HA 23/05/2011

DEDICATORIA

DEDICO ESTE TRABAJO CON TODO MI AMOR

A MI *DIOS* POR SU INFINITO AMOR SU INFINITA BONDAD Y SU INFINITA SABIDURIA QUE DIA A DIA ME REGALA GRACIAS PADRE AMADO

A *EKATHERINA DEL CARMEN* QUIEN DESDE SU NACIMIENTO ME HA INSPIRADO A SER UNA MADRE UNA PROFESIONAL Y UNA MUJER AGRADECIDA Y EXITOSA GRACIAS HIJA DE MI ALMA

A *MERCEDES LERMA DE MELO* POR ESTAR SIEMPRE A MI LADO APOYANDOME EN TODOS LOS MOMENTOS DE FELICIDAD DE EXITOS Y DE ESPIRITUALIDAD GRACIAS MADRE DE MI VIDA

A MIS HERMANOS *VICTOR, DAMARIS Y MARCO* MIS SOBRINOS *JEAN CARLOS Y MARJORIE* QUIENES SIEMPRE ME HAN BRINDADO SU COMPRENSION Y CARINO GRACIAS FAMILIA QUERIDA

AGRADECIMIENTO

ETERNAMENTE GRACIAS

EXISTEN PERSONAS EN NUESTRAS VIDAS QUE SON ANGELES NOS REGALAN UNA SONRISA NOS OFRECEN SU APOYO INCONDICIONAL NOS REPRENDEN NOS HACEN VER Y SENTIR QUE LA VIDA ES HERMOSA Y QUE CADA DIA HAY QUE VIVIRLA CON FORTALEZA DETERMINACION Y PASION

EL DECIR GRACIAS DESDE LO MAS PROFUNDO DE MI CORAZON NO COMPENSA EL AGRADECIMIENTO QUE LE TENGO Y LE OFREZCO A USTED *Dr JOSE DEL ROSARIO GARRIDO NAVARRO* POR CREER EN MÍ POR GUIARME EN MIS METAS ACDEMICAS Y POR LLEVARME AL EXITO EN CADA UNA DE LAS ETAPAS DE MI CARRERA PROFESIONAL

LUPE

AGRADECIMIENTO ESPECIAL

UN AGRADECIMIENTO MUY ESPECIAL

A TODAS AQUELLAS PERSONAS QUE ME BRINDARON SU APOYO CARINO COMPRENSION Y ME MOTIVARON A CULMINAR ESTE MARAVILLOSO TRABAJO DE GRADO

A MIS PROFESORES *MANUELA FOSTER, ELOY RICO JOSE GARRIDO* Y OTROS QUIENES A TRAVES DE SUS EXPERIENCIAS CONOCIMIENTOS ACADEMICOS Y PROFESIONALES ME FORMARON EN ESTA ESPECIALIDAD

A MIS COMPANEROS Y AMIGOS *AMILCAR, GLADYS IRIS ROSY LULU e ILKA,* CON QUIENES COMPARTI MOMENTOS INOLVIDABLES

A MI AMADO *DANIEL ROLAND* POR SUS CONSEJOS APOYO Y AMOR INCONDICIONAL

INDICE

INDICF

CAPITULO II EL PROBLEMA DE TRANSPORTE EN LA TEORIA DE GRAFOS

CAPITULO III EL PROBLEMA DE HITCHCOCK

RESUMEN

RESUMEN

Este trabajo cuyo tıtulo es UN ENFOQUE AL PROBLEMA DE TRANSPORTE consta de tres capıtulos y un anexo El prımer capıtulo presenta el problema de transporte enfocado a la Programacıon Lıneal en la forma general forma estandar y forma canonıca Se desarrolla un problema con la ayuda del algorıtmo de transporte En la segunda parte del trabajo se definen conceptos prelımınares para el enfoque en la teorıa de grafos y se desarrolla el mısmo problema del capıtulo uno a traves de la modelacıon en grafos con el proposıto de encontrar un presupuesto mınımal y comparar ventajas y eficıencıas de ambos metodos El tercer capıtulo desarrolla el problema de Hıtchcock donde se presenta el metodo de los presupuestos desarrollando un problema de aplıcacıon con la ayuda de este algorıtmo Al final se agrega un anexo donde se presentan detalladamente los calculos que nos permıtıeron desarrollar los problemas de aplıcacıon para llegar a las conclusıones y recomendacıones de este trabajo de grado

SUMMARY

Thıs work whose tıtle ıs AN APRPROACH TO THE TRANSPORTATION PROBLEM consısts of three chapters and an annex The first chapter ıntroduces the transportatıon problem of lınear programmıng focused on the general form standard form and canonıcal form It develops a problem wıth the help of the transport algorıthm In the second part of the paper we define prelımınary concepts for the focus on graph theory and develops the same problem ın chapter one through modelıng on graphs wıth the aım of findıng a mınımal budget and compare advantages and efficıencıes of both methods The thırd chapter develops the problem of Hıtchcock whıch presents the method of budgets developed an ımplementatıon problem wıth the help of thıs algorıthm At the end ıs added an appendıx whıch presents detaıled calculatıons that enabled us to develop ımplementatıon problems to reach conclusıons and recommendatıons of thıs graduate work

INTRODUCCION

INTRODUCCION

La programacion lineal se ocupa de una gran variedad de problemas especificos con estructuras especiales que en general se pueden resolver con algoritmos propios de la teoria El problema de transporte es un caso especial

El algoritmo de transporte en la programacion lineal es un metodo de resolucion aplicable en problemas de tipo transporte Se hace necesaria la obtencion de una solucion inicial de base del problema para aplicar el algoritmo y para eso se utiliza en este trabajo el metodo de la esquina noroeste de G Dantzing

El modelo de transporte es de gran utilidad para resolver una serie amplia de problemas que se pueden simular en un grafo especifico conocido como red de transporte Estos problemas pueden ser de dotacion de agua potable a comunidades optimizacion del volumen de informacion que se intercambia entre entidades conduccion de aguas negras recolección de basura en comunidades y transporte vehicular entre otros

Los temas mencionados ayudan a concluir que el tratamiento de los problemas tipo transporte merece ser estudiado

Con el interes de examinar alternativas de solucion en este trabajo se aborda el enfoque del problema de transporte en la teoria de grafos Con los conceptos de flujo y corte de la red de transporte se establece la relación que siempre se da entre el valor del flujo y la capacidad del corte en una red Esta relacion permite establecer el famoso principio de

Ford – Fulkerson que es la base para resolver el problema de flujo maxımo con el algorıtmo que lleva el mısmo nombre

Despues se ıntroduce el llamado presupuesto γ en la red para ıdentıficar la relacıon que sıempre exıste entre el valor del flujo $v[\varphi]$ y la capacıdad del presupuesto en la red $c(\gamma)$ que es la base del llamado Metodo Hungaro con el que tambıen se resuelve el problema de transporte en la teorıa de grafos

Fınalmente se presenta el problema de Hıtchcok el cual permıte encontrar un presupuesto optımo a traves de redes con flujo ılımıtado

CAPITULO I

EL PROBLEMA DE TRANSPORTE EN LA PROGRAMACION LINEAL

1 Problema de Programación Lineal

1 1 Forma general

Un problema de programacion lineal esta formado por una funcion objetivo que representa algun criterio economico para optimizar y un conjunto de restricciones que responden a la naturaleza especifica del problema

Consideramos un problema de programacion lineal en su forma general

$$
\begin{aligned}
& Opt(c_1x^1 + c\ x^2 + c_3x^3) \\
& A_{11}x^1 + A_{12}x^2 + A_{13}x^3 \geq b_1 \\
& A_{21}x^1 + A_{22}x^2 + A_{23}x^3 = b_2 \\
& A_{31}x^1 + A_{32}x\ \ + A_{33}x^3 \leq b_3 \\
& x^1 \geq 0\ x^2 \leq 0\ x^3 arbitrario
\end{aligned}
$$

donde $x^1\ x^2\ x^3$ son vectores cuyas componentes son variables sujetas respectivamente a las condiciones de no negativas de no positividad y representan a numeros reales cualesquiera

1.2 Forma Estándar

Un problema de programación lineal cuyas restricciones son todas de igualdad y sus variables son no negativas se considerará expresado en su **forma estandar**

El problema

$$
\begin{cases}
\mathbf{min(max)\ c'x} \\
Ax = b \\
x \geq 0
\end{cases}
$$

donde A es la matrız de los coeficıentes a_{ij} $i = 1\ 2\ \ldots\ m$ y $j = 1\ 2\ \ldots\ n$ x es un vector de n varıables b es el vector de m termınos lıbres y x un vector de m componentes todas ıguales a cero esta expresado en su forma estandar

Llamaremos **concordante** a una restrıccıon del tıpo $\geq$ en un problema de mınımızacıon o del tıpo $\leq$ en un problema de maxımızacıon

1 3 Forma Canónıca

Dıremos que un problema de programacıon lıneal esta en su **forma canónıca** sı todas sus restrıccıones son concordantes y sus varıables son no negatıvas

$$\begin{array}{ll} \min c\,x & \qquad\qquad \max c\,x \\ Ax \geq b & \qquad\qquad Ax \leq b \\ x \geq 0 & \qquad\qquad x \geq 0 \end{array}$$

Observación 1

Cualquıer problema de programacıon lıneal puede ser expresado en las formas canonıca o estandar utılızando propıedades algebraıcas elementales

De ıgual manera, cualquıer problema de mınımızacıon puede transformarse en uno de maxımızacıon equıvalente y vıceversa, tomando en cuenta que

$$\begin{array}{l} \min f(x) \\ x \in X \end{array} = \begin{array}{l} \max(-f(x)) \\ x \in X \end{array}$$

Consıderese el problema

$$\begin{cases} \min(c\,x) \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Donde **A** una matriz de **m** filas y **n** columnas con **m** < **n** de rango **m** Sea $x = (x_1\ x_2\ \ x\ )$ una solucion del sistema **Ax = b** Las definiciones que siguen son necesarias para este trabajo

Se dira que $x = (x_1\ x_2\ \ x\ )$ es **solucion basica** si las columnas de **A** correspondientes a las componentes no nulas de **x** son vectores linealmente independientes

La solucion basica **x** se llamara **solucion admisible o programa** si sus componentes son no negativas Si un programa tiene exactamente **m** componentes no nulas se dira que es no degenerado de lo contrario se dira que es degenerado Una matriz **B** cuadrada **m x m** no singular extraida de **A** se llamara base

Si **S** es la matriz formada con las **n** − **m** columnas de **A** que no pertenecen a **B** y respectivamente a **S** entonces el sistema **Ax = b** puede representarse como sigue

$$Bx^B + Sx^S = b$$

Como B es no singular

$$x^B = B^{-1}b - B^{-1}Sx^S$$

Asi las cosas se dispone de una expresion para el programa de base con respecto a **B**

$$x^B = B^{-1}b \geq 0\ x^S = 0$$

2 Problemas clásicos de programación lineal

2 1 Utilización eficiente de recursos limitados

Es corriente que una empresa tenga a su disposición varios tipos de recursos (materia prima, mano de obra, recursos financieros y otros) en cantidades limitadas Sea i $1 \leq i \leq m$ el numero del tipo del recurso y b_i la cantidad disponible del recurso Se pueden desarrollar varias actividades con la utilizacion de estos recursos procesos de produccion campaña de alfabetizacion construcción de un complejo comercial etc Denotaremos con j $1 \leq j \leq n$ el numero del tipo de actividad y con x_j el nivel (desconocido) en el que se debe desarrollar esta actividad

La cantidad de recursos i necesaria para la elaboracion de una unidad del producto j la denotaremos a_{ij} y asumiremos que la misma depende solamente del tipo del producto que se elabora y del tipo del recurso utilizado y no de la cantidad a producir esto constituye una simplificacion de la situacion real

Consideremos las siguientes magnitudes

$a_{ij}x_j$ cantidad de recurso i utilizado para producir la cantidad x_j

$\sum_{j=1} a_{ij}x_j$ cantidad de recurso i utilizado para la produccion total (de los n productos)

Resulta que

(1) $x_j \leq b$ $1 \leq i \leq m$

No podemos utilizar mas recursos i de los que disponemos

Ademas

(2) $x_j \geq 0$ $1 \leq j \leq n$

puesto que x_j representa la cantidad que se producira del surtido j y como tal no puede ser un numero negativo

Sabemos que los sistemas (1) – (2) pueden tener una infinidad de soluciones una unica solución o ninguna solución En la practica lo mas frecuente es una infinidad de soluciones de modo que es posible organizar los procesos de produccion de los surtidos j, $1 \leq j \leq n$ de una infinidad de maneras teniendo en cuenta las restricciones derivadas de los recursos limitados Esto pone en evidencia la imposibilidad practica del gerente de la empresa de poder comparar todas las estrategias posibles para adoptar dentro del conjunto de soluciones la decision correcta

La estrategia a ser elegida deberá obedecer a un criterio economico que proporcione un beneficio maximo o un costo minimo por ejemplo denotaremos con

v_j el precio de venta de una unidad del producto

c_j el precio de costo unitario del mismo producto

$\sum_{j\ 1} c_j x_j$ gasto de produccion

El beneficio que se obtiene seria

(3) $$\sum_{j\ 1} c_j x_j = \sum_{j\ 1} (v_j - c_j) x_j$$

Entre todas las variantes de solucion del sistema de ecuaciones $x_j \le b$ $1 \le i \le m$ y $x_j \ge 0$ $1 \le j \le n$ nos interesa la que maximice al beneficio (3)

De un problema economico surge el siguiente problema matematico

$$\mathbf{Max} \sum_{j\ 1} (v_j \quad c_j) x_j$$

(4) $$\sum_{j\ 1} a_{j} x_j \le b_i$$

$$x_j \ge 0,$$

El cual representa un problema de programación lineal

2 2 Un problema de transporte

Supongamos que contamos con **m** centros de abastecimiento (depositos) **n** centros de consumo (fabricas almacenes etc) y se desea determinar un plan de transporte para un producto homogeneo que se encuentra en cantidades **a** en el depósito **i** **(1 ≤ i ≤ m)** y es pedido en cantidades $\mathbf{b}_j$ en el almacen **j** $j \in J$

Sea

$\mathbf{x}_{ij}$ la cantidad que va a ser transportada del deposito **i** centro de consumo **j**

$\mathbf{c}_j$ el precio de transporte desde el origen **i** hasta el destino **j** de una unidad del producto considerado

Podemos expresar entonces las siguientes magnitudes

$\mathbf{x}_{i} + \mathbf{x}_{i2} + \quad + \mathbf{x}$ cantidad transportada del deposito **i** a todos los **n** centros de consumo

$\mathbf{x}_{1j} + \mathbf{x}_{2j} + \quad + \mathbf{x}_{mj}$ cantidad transportada de todos los **m** depósitos al centro de consumo **j**

$\mathbf{c}_{ij}\mathbf{x}_{ij}$ costo de transporte de la cantidad $\mathbf{x}_{ij}$ de productos del deposito **i** al centro de consumo **j**

Observación 2

Se asumira implicitamente que este costo unitario no depende de la cantidad transportada por la ruta respectiva.

Se tiene que

(5) $$\sum_{j\,1} x_j = a \qquad \mathbf{1 \le i \le m}$$

(6) $$\sum_{i}^{m} x_j = b_j \qquad \mathbf{1 \le j \le n}$$

(7) $$x_j \ge 0 \qquad \mathbf{1 \le i \le m} \quad \mathbf{1 \le j \le n}$$

El costo total del transporte de todos los depositos a todos los centros de consumo es

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1} c_{ij} x_{ij}$$

y para que se pueda efectuar el transporte es necesario que

(7a) $$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1} b_j$$

El sistema de ecuaciones lineales tiene en esta condicion una infinidad de soluciones entre las cuales se quiere elegir la que minimice el costo total de transporte Asi el problema de transporte tiene la forma

(a) $$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1} c_{ij} x_{ij}$$

(8) (b) $\sum_{j=1} x_{ij} = a_i \qquad 1 \le i \le m$

(c) $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad 1 \le j \le n$

(d) $x_{ij} \ge 0 \qquad 1 \le i \le m \qquad 1 \le j \le n$

Problemas de este tipo pueden aparecer en otras situaciones Por ejemplo existen **m** puntos de aprovisionamiento y **n** de consumo y se desea determinar un plan de transporte (x_{ij}) $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ que minimice los gastos totales de transporte

(9 a) $$\mathrm{Min} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1} c_{ij} x_{ij}$$

(9 b) $\sum_{j=1} x_{ij} \le a_i \qquad 1 \le i \le m$

(9-c) $\sum_{i=1} x_{ij} \ge b_j \qquad 1 \le j \le n$

(9-d) $x_{ij} \ge 0 \qquad 1 \le i \le m \qquad 1 \le j \le n$

donde $\mathbf{a_i}$ $1 \leq \mathbf{i} \leq \mathbf{m}$ son las capacidades de los centros de depositos $\mathbf{b_j}$ $1 \leq \mathbf{j} \leq \mathbf{n}$ las cantidades demandadas en las industrias y $\mathbf{c}_{\mathbf{j}}$ el costo unitario de transporte del deposito **i** a la industria **j** Las condiciones $\sum_{j=1} x_{ij} \leq \mathbf{a_i}$ $1 \leq \mathbf{i} \leq \mathbf{m}$ y $\sum_{i} x_{ij} \geq \mathbf{b_j}$ $1 \leq \mathbf{j} \leq \mathbf{n}$ tienen interpretaciones economicas evidentes Para que exista solucion es necesario que

(9 e)
$$\sum_{i}^{m} a \geq \sum_{j=1} b_j$$

Si invertimos el sentido de las desigualdades en el problema anterior se podria encontrar un nuevo enunciado

3 Dualidad en programacion lineal

Definición 1

Consideremos el problema de programación lineal

(10)
$$\begin{aligned}
&Min(c_1x^1 + c_2x^2 + c_3x^3)\\
&A_{11}x^1 + A_{12}x^2 + A_{13}x^3 \geq b_1\\
&A_{21}x^1 + A_{22}x^2 + A_{23}x^3 = b_2\\
&A_{31}x^1 + A_{32}x^2 + A_{33}x^3 \leq b_3\\
&x^1 \geq 0\ x^2 arbitrario\ x^3 \leq 0
\end{aligned}$$

Llamaremos **problema dual** del problema (10) (que se llamara Primal) al programa de programacion lineal

(11)
$$\begin{aligned}
&Max(u_1b_1 + u_2b_2 + u_3b_3)\\
&A_{11}u_1 + A_{21}u_2 + A_{31}u_3 \leq c_1\\
&A_{21}u_1 + A_{22}u_2 + A_{23}u_3 = c_2\\
&A_{31}u_1 + A_{32}u_2 + A_{33}u_3 \geq c_3\\
&u_1 \geq 0\ u_2 arbitrario\ u_3 \leq 0
\end{aligned}$$

Dıremos que uno es dual del otro (refiriendonos a (10) y (11) o que se trata de un par de programas duales

Los sıguıentes pares de programas duales resultaran utıles en este contexto

(12) **(a)** $\begin{array}{l} \min c\,x \\ Ax \geq b \;\; x \geq 0 \end{array}$ **(b)** $\begin{array}{l} \max b\,\mu \\ A\,\mu \leq c \;\; u \geq 0 \end{array}$

(13) **(a)** $\begin{array}{l} \min c\,x \\ Ax = b \;\; x \geq 0 \end{array}$ **(b)** $\begin{array}{l} \max \mu b \\ A\,\mu \leq c \;\; arbitraria \end{array}$

Se haran consıderacıones para el par de problemas duales (12) (presentados en su forma canonıca) las cuales serán valıdas para cualquıer par de problemas duales ya que cualquıer par de problemas duales puede ser llevado por transformacıones elementales a un par de problemas duales expresados en su forma canonıca

3 1 Teorema Fundamental de dualıdad

Teorema 1

Para cualquıer par de problemas duales solo es posıble una de las sıguıentes tres sıtuacıones

(a) Ambos problemas tıenen programas En este caso ambos problemas tıenen programas optımos cuyos valores coıncıden

(b) Uno tıene programa y el otro no El programa que exıste es no acotado o ınfinıto

(c) Nınguno tıene programa

3 2 Teorema de Holgura Complementaria

Teorema 2

Las soluciones x y u de los problemas (12 a) y (12 b) respectivamente son optimas si y solo si

(14) $\quad \bar{\mu}(A\hat{x} - b) = 0$ y $\quad x(c - A\mu) = 0$

En efecto siendo $\bar{x}$ y $\bar{\mu}$ optimas el teorema anterior en su parte (a) nos garantiza que $cx = b\mu$ asi que $cx - xA\mu + xA\mu - b\mu = 0$

Se puede escribir $xc - xA\mu + \mu Ax - \mu b = 0$ aplicando propiedades de la matriz transpuesta Entonces $x(c - A\nu) + \mu(Ax - b) = 0$ Y como se trata de sumandos no negativos cada uno de ellos es nulo

Teniendo que $x \geq 0$ $\mu \geq 0$ $Ax \geq b$ y $A\mu$ se hace obvio que si (14) se cumple $x(c - Au) + u(Ax - b) = 0$ entonces $cx = b\mu$ lo que significa, por el lema 2 que x y μ son optimos

4 Resolución de problema de transporte

Es claro que cualquier problema de transporte puede ser llevado a la forma (8) que es con la que trabajaremos

El programa dual de

(a) min $\sum_{1}^{m} \sum_{j\,1} c_{ij} x_{ij}$

(b) $\sum_{j\,1} x_j = a$ $\qquad 1 \leq i \leq m$

(c) $\sum_{1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad 1 \leq j \leq n$

(d) $x_{ij} \geq 0 \qquad 1 \leq i \leq n$

es

(15)
$$\begin{cases} Max(\sum_{1}^{m} a_i \mu_i + \sum_{j=1} b_j v_j) \\ \mu_i + v_j \leq c_{ij} \qquad 1 \leq i \leq m \qquad 1 \leq j \leq n \\ \mu_i \; v_j \text{ arbitrarias} \end{cases}$$

Por el teorema de holgura complementaria, dado que las soluciones duales $(\bar{x}_{ij})$ y $(\bar{\mu}_i \; \bar{v}_j)$ son optimas se tiene que

$$x_{ij}(c_{ij} - \bar{\mu}_i - \bar{v}_j) = 0$$

Esta ultima condición indica que si $\bar{x}_{ij} > 0$ entonces $c_{ij} = \bar{\mu}_i + \bar{v}_j$

Para enunciar el algoritmo de transporte unificaremos criterios en las siguientes denominaciones

Celula un par de numeros **(i,j)**

Ciclo una serie de celulas de forma

$(i_1 \; j_1) \; (i_1 \; j_2) \; (i_2 \; j_2) \; (i_2 \; j_3) \quad (i \; j) \; (i \; j_1)$

4 1 Algoritmo de transporte

Las etapas de una iteración del algoritmo son las siguientes

a Considerar el Tablero de Transporte T

T =

c_{11}	c_{12}		c_1	a_1
c_{21}	c_{22}		c_2	a_2
c_{m1}	c_{m2}		c_m	a_m
b_1	b_2		b	

y determinar una solucion inicial de base (el procedimiento se presenta en la pagina 18)

b Denotando con I el conjunto de las celulas **(i j)** que corresponden a las variables de base se resuelve el sistema

$$\mu + v_j = c_j \qquad (i\ j) \in I$$

Fijandose arbitrariamente el valor de alguna variable (por ejemplo $u_1 = 0$) Se escriben los valores encontrados $\overline{\mu}$ $\bar{v}_j$ en los margenes del tablero **T** y se calcula la expresion

$$\delta_j = \overline{\mu} + \bar{v}_j - \bar{c}_j \quad \text{para } (i\ j) \notin I$$

(b 1) Si $\delta_{ij} \leq 0\ \forall\ (i\ j) \in I$ entonces la solucion x_{ij} es optima

(b 2) Si $\delta_j > 0$ para al menos una celula **(i j)** se calcula $\delta_{kl} = \max\limits_{(i\ j) \notin I} \delta_j$ y se determina el el ciclo formado por la celula **(k l)** con las celulas correspondientes a las variables de base

c Se marca, de algun modo las celulas que ocupan una posición par en el ciclo determinado en la etapa **(b-2)** enumerando este ciclo en un sentido cualquiera, partiendo de la celula **(k, l)** a la cual se le asignara el numero 1 Entre las celulas marcadas se busca la variable de valor minimo sea x_{ps} esta variable (o cualquiera de estas variables si son varias) y $\bar{x}_p$ su valor

d Se resta $\bar{x}_{\mu}$ de los valores situados en las celulas marcadas y se suma $\bar{x}_p$ a los valores de las otras celulas del ciclo La nueva solucion de base esta formada por $x_{kl} = \bar{x}_p$ y las variables de la base precedente (con los valores modificados en las celulas del ciclo) a parte de la variable x_p que abandona la base

De esta ultima operacion pueden resultar variables de base (aparte de x_{kl}) con valor nulo estas variables nulas deben considerarse como formando parte de la nueva solucion base la cual seria ahora degenerada

e Se repite para la nueva base los pasos **(b)** **(c)** **(d)** hasta $\mu + v_j - c_j \leq 0$ para todas las celulas **(i j)** caso en el que se obtiene la solucion optima

4 2 Solucion Inicial de Base

El metodo general es el siguiente

a Se da a una variable de base cualquiera x_j el valor $\bar{x}_j$ = **min {a_i b_j}**

b Se reemplazan **a** y b_j respectivamente por $a_i - \bar{x}_j$ y $b_j - \bar{x}_j$ y se suprime la linea **i** si $\bar{x}_j = a$ o la columna **j** si $\bar{x}_j = b$ con lo que resulta un tablero reducido

c Se repiten las operaciones (a) y (b) en los tableros reducidos hasta satisfacer todas las necesidades

Utilizamos el caso particular del metodo Noreste de G Dantzing que consiste en la eleccion de la variable correspondiente a la celda situada en la primera linea y primera columna del tablero T

4 3 Problema de Aplicacion

Considere el problema de transporte indicado por los datos del tablero N 1 El numero indicado en cada celda es el costo asociado con la variable particular

a Determinacion de una solucion basica factible inicial

La oferta es igual a la demanda total es decir $\sum_{i}^{m} a = \sum_{j\ 1} b_j$

Utilizaremos el metodo de la esquina noreste para encontrar la solucion basica factible la cual denotaremos por I_o esta base tiene exactamente $m + n - 1 = 4 + 5 - 1 = 8$ valores x_j positivos

T =

6	0	6	6	4
5	6	5	0	3
6	5	0	5	4
5	0	5	0	3
0	4	6	6	5
6	5	4	4	

Tablero N° 1

En el tablero N°2 se encuentra la primera base encontrada, donde las variables basicas requeridas son 8 Las celdas en blanco representan a las variables no basicas y las variables asociadas tienen el valor de cero

T =

6 / 4	0	6	6	4
5 / 2	6 / 1	5	0	3
6	5 / 4	0 / 0	5	4
5	0	5 / 3	0	3
0	4	6 / 1	6 / 4	5
6	5	4	4	

Tablero N° 2

La base I_o= {(1 1) (2 1) (2 2) (3 2) (3 3) (4 3) (5 3) (5 4)}

El costo asociado es

$$Z = 6(4) + 5(2) + 6(1) + 5(4) + 0(0) + 5(3) + 6(1) + 6(4) = 105$$

Iteracion 1

Resolviendo el sistema $c_{ij} = u_i + v_j$ donde $(i\ j) \in I_0$ donde $I = \{(1\ 1)\ (2\ 1)\ (2\ 2)\ (3\ 2)\ (3\ 3)\ (4\ 3)\ (5\ 3)\ (5\ 4)\}$

$$u_1 + v_1 = 6$$
$$u_2 + v_1 = 5$$
$$u_2 + v_2 = 6$$
$$u_3 + v_2 = 5$$
$$u_3 + v_3 = 0$$
$$u_4 + v_3 = 5$$
$$u_5 + v_3 = 6$$
$$u_5 + v_4 = 6$$

Haciendo $u_1 = 0$ obtenemos que los valores asociados son

u_2	=	1	v_1	=	6
u_3	=	2	v_2	=	7
u_4	=	3	v_3	=	2
u_5	=	4	v_4	=	2

Los calculos de los valores $\delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ son los siguientes

La abreviatura VNB indica **variable no basica**

VNB	$u_i + v_j - c_{ij} = \delta_{kl}$
x_{12}	$u_1 + v_2 \quad c_{12} = 0 + 7 \quad 0 = 7$
x_{13}	$u_1 + v_3 \quad c_{13} = 0 + 2 \quad 6 = 4$
x_{14}	$u_1 + v_4 \quad c_{14} = 0 + 2 \quad 6 = -4$

x_{23}	u_2	+	v_3	c_{23}	=	1	+	2	5	=	4
x_{24}	u_2	+	v_4	c_{24}	=	1	+	2	0	=	1
x_{31}	u_3	+	v_1	c_{31}	=	2	+	6	6	=	2
x_{34}	u_3	+	v_4	c_{34}	=	2	+	2	5	=	5
x_{41}	u_4	+	v_1	c_{41}	=	3	+	6	5	=	4
x_{42}	u_4	+	v_2	c_{42}	=	3	+	7	0	=	10
x_{44}	u_4	+	v_4	c_{44}	=	3	+	2	0	=	5
x_{51}	u_5	+	v_1	c_{51}	=	4	+	6	0	=	10
x_{52}	u_5	+	v_2	c_{52}	=	4	+	7	4	=	7

Como la celula (3 4) es negativa, el δ_{kl} elegido es el x_{34} que permite determinar el circuito

C = {(3 3) (3 4) (5 4) (5 3)}

Las celulas pares son (5 4) y (3 3) y min {x_{33} x_{54}} = min {0 4} = 0 Por lo tanto x_{33} es la variable que sale de la base y asume el valor de cero y x_{34} es el vector que entra a la base

Los nuevos valores seran

$X_{34} = 0$ $\quad$ $x_{54} = 4 - 0 = 4$ $\quad$ $x_{53} = 1 + 0 = 1$

El costo asociado es Z = 6(4) + 5(2) + 6(1) + 5(4) + 5(0) + 5(3) + 6(1) + 6(4) = 105

El tablero N 3 muestra la nueva base encontrada

Determinamos una nueva solucion inicial de base resolviendo el sistema $c_{ij} = u_i + v_j$ donde $(i\ j) \in I_1$

La nueva base I_1= {(1 1) (2 1) (2 2) (3 2) (3 4) (4 3) (5 3) (5 4)}

$$u_1 + v_1 = 6$$

$$u_2 + v_1 = 5$$

$$u_2 + v_2 = 6$$

$$u_3 + v_2 = 5$$

$u_3 \quad + \quad v_4 \quad = \quad 5$

$u_4 \quad + \quad v_3 \quad = \quad 5$

$u_5 \quad + \quad v_3 \quad = \quad 6$

$u_5 \quad + \quad v_4 \quad = \quad 6$

6 / 4	0 [7]	6 [4]	6 [4]	$u_1 = 0$
5 / 2	6 / 1	5 [4]	0 [1]	$u_2 = 1$
6 [2]	5 / 4	0 [0]	5 / 0	$u_3 = 2$
5 [4]	0 [10]	5 / 3	0 [5]	$u_4 = 3$
0 [10]	4 [7]	6 / 1	6 / 4	$u_5 = 4$
$v_1 = 6$	$v_2 = 7$	$v_3 = 2$	$v_4 = 2$	

Tablero N° 3

Haciendo $u_1 = 0$ obtenemos que los valores asociados son

u_2	=	1	v_1	=	6
u_3	=	2	v_2	=	7
u_4	=	2	v_3	=	7
u_5	=	1	v_4	=	7

Los calculos de los valores $\delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ son los siguientes

VNB	$u_i + v_j - c_{ij} = \delta_{kl}$
x_{12}	$u_1 + v_2 \quad c_{12} = 0 + 7 \quad 0 = 7$
x_{13}	$u_1 + v_3 \quad c_{13} = 0 + 7 \quad 6 = 1$

x_{14}	$u_1 + v_4$	c_{14}	$= 0 + 7 \quad 6 = 1$
x_{23}	$u_2 + v_3$	c_{23}	$= 1 + 7 \quad 5 = 1$
x_{24}	$u_2 + v_4$	c_{24}	$= 1 + 7 \quad 0 = 6$
x_{31}	$u_3 + v_1$	c_{31}	$= 2 + 6 \quad 6 = 2$
x_{33}	$u_3 + v_3$	c_{33}	$= 2 + 7 \quad 5 = 5$
x_{41}	$u_4 + v_1$	c_{41}	$= 2 + 6 \quad 5 = 1$
x_{42}	$u_4 + v_2$	c_{42}	$= 2 + 7 \quad 0 = 5$
x_{44}	$u_4 + v_4$	c_{44}	$= 2 + 7 \quad 0 = 5$
x_{51}	$u_5 + v_1$	c_{51}	$= 1 + 6 \quad 0 = 5$
x_{52}	$u_5 + v_2$	c_{52}	$= 1 + 7 \quad 4 = 2$

El δ_{kl} elegido es el x_{31}que permite determinar el circuito C = {(3 1) (2 1) (2 2) (3 2)} Las celulas pares son (2 1) y (3 2) y min $\{x_{21} \ x_{32}\}$ min {2 4} = 2 por lo tanto x_{21} es la variable que sale de la base y asume el valor de cero El x_{31} es el vector que entra a la base Los nuevos valores seran

$x_{31} = 2 \qquad x_{32} = 4 - 2 = 2 \qquad x_{22} = 1 + 2 = 3$

La nueva base I_2= {(1 1) (2 2) (3 1) (3 2) (3 4) (4 3) (5 3) (5 4)}

El costo asociado es

$Z = 6(4) + 6(3) + 6(2) + 5(2) + 5(0) + 5(3) + 6(1) + 6(4) = 109$ El tablero N 4 muestra la nueva base encontrada

Resolveremos el sistema $c_{ij} = u \ + v_j$ donde $(i \ j) \in I_2$

$u_1 + v_1 = 6$

$u_2 + v_2 = 6$

$u_3 + v_1 = 6$

$u_3 + v_2 = 5$

$$u_3 + v_4 = 5$$

$$u_4 + v_3 = 5$$

$$u_5 + v_3 = 6$$

$$u_5 + v_4 = 6$$

Encontramos que los valores asociados son

u_1	=	0	v_1	=	6
u_2	=	1	v_2	=	5
u_3	=	0	v_3	=	0
u_4	=	5	v_4	=	5
u_5	=	6			

6 4	0 $\boxed{5}$	6 $\boxed{6}$	6 $\boxed{1}$	$u_1 = 0$
5 $\boxed{2}$ 2	6 3	5 $\boxed{-4}$	0 $\boxed{6}$	$u_2 = 1$
6 2	5 2	0 $\boxed{0}$	5 0	$u_3 = 0$
5 $\boxed{6}$	0 $\boxed{10}$	5 3	0 $\boxed{10}$	$u_4 = 5$
0 $\boxed{12}$	4 $\boxed{7}$	6 1	6 4	$u_5 = 6$
$v_1 = 6$	$v_2 = 5$	$v_3 = 0$	$v_4 = 5$	

Tablero N° 4

Los $\delta_{ij} = u_i + v_j - c_j$ que cumplan con la condición

a. Si $\delta_{ij} \geq 0$ entonces la solucion es optima

b. Si $\exists$ (i,j) 0 / $\delta_{ij} < 0$ entonces buscamos $\delta_{kl} = \min\limits_{(i,j) \notin I_2} \delta_{ij}$

VNB	$u_i + v_j - c_{ij}$	$= \delta_{kl}$
x_{12}	$u_1 + v_2 \quad c_{12}$	$= 0 + 5 \quad 0 = 5$
x_{13}	$u_1 + v_3 \quad c_{13}$	$= 0 + 0 \quad 6 = 6$*
x_{14}	$u_1 + v_4 \quad c_{14}$	$= 0 + 5 \quad 6 = 1$
x_{21}	$u_2 + v_1 \quad c_{21}$	$= 1 + 6 \quad 5 = 2$
x_{23}	$u_2 + v_3 \quad c_{23}$	$= 1 + 0 \quad 5 = 4$
x_{24}	$u_2 + v_4 \quad c_{24}$	$= 1 + 5 \quad 0 = 6$
x_{33}	$u_3 + v_3 \quad c_{33}$	$= 0 + 0 \quad 0 = 0$
x_{41}	$u_4 + v_1 \quad c_{41}$	$= 5 + 6 \quad 5 = 6$
x_{42}	$u_4 + v_2 \quad c_{42}$	$= 5 + 5 \quad 0 = 10$
x_{44}	$u_4 + v_4 \quad c_{44}$	$= 5 + 5 \quad 0 = 10$
x_{51}	$u_5 + v_1 \quad c_{51}$	$= 6 + 6 \quad 0 = 12$
x_{52}	$u_5 + v_2 \quad c_{52}$	$= 6 + 5 \quad 4 = 7$

El δ_{kl} elegido es el x_{13}que permite determinar el circuito $C = \{(1\ 1)\ (1\ 3)\ (3\ 4)\ (5\ 3)\}$ Las celulas pares son (1 1) (5 3) (3 4) y $x_{13} = \min \{x_{11}\ x_{53}\ x_{34}\}\ \min \{4\ \ 1\ 0\} = 0$ Por lo tanto el x_{34} sale de la base El x_{13} es el vector que entra a la base

Los nuevos valores seran

$x_{11} = 4 \qquad x_{53} = 1 \qquad x_{13} = 0 \qquad x_{54} = 4$

La nueva base $I_3 = \{(1\ 1)\ \ (2\ 2)\ \ (3\ \ 2)\ \ (3\ 1)\ \ (3\ 4)\ \ (4\ \ 3)\ \ (5\ 3)\ \ (5\ \ 4)\}$

El costo asociado es

$Z = 6(4) + 6(0) + 6(3) + 6(2) + 5(2) + 5(3) + 6(1) + 6(4) = 109$

El tablero N 5 muestra la nueva base encontrada

6 / 4	0 [5]	6 [6]	6 [1]	$u_1 = 0$
5 [2]	6 / 3	5 [4]	0 [6]	$u_2 = 1$
6 / 2	5 / 2	0 [0]	5 / 0	$u_3 = 0$
5 [6]	0 [10]	5 / 3	0 [10]	$u_4 = 5$
0 [12]	4 [7]	6 / 1	6 / 4	$u_5 = 6$
$v_1 = 6$	$v_2 = 5$	$v_3 = 0$	$v_4 = 5$	

Tabla N° 5

Resolveremos el sistema $c_{ij} = u \; + v_j$ donde $(i \; j) \in I_3$

$$u_1 + v_1 = 6$$

$$u_1 + v_3 = 6$$

$$u_2 + v_2 = 6$$

$$u_3 + v_1 = 6$$

$$u_3 + v_2 = 5$$

$$u_4 + v_3 = 5$$

$$u_5 + v_3 = 6$$

$$u_5 + v_4 = 6$$

Encontramos que los valores asociados son

u_1	=	0	v_1	=	6
u_2	=	1	v	=	5
u_3	=	0	v_3	=	6
u_4	=	1	v_4	=	6
u_5	=	0			

Los $\delta_{ij} = u_i + v_j - c_j$ que cumplan con la condicion

VNB	$u_i + v_j - c_j = \delta_{kl}$
x_{12}	$u_1 + v_2 \quad c_{12} = 0 + 5 \quad 0 = 5$
x_{14}	$u_1 + v_4 \quad c_{14} = 0 + 6 \quad 6 = 0$
x_{21}	$u_2 + v_1 \quad c_{21} = 1 + 6 \quad 5 = 2$
x_{23}	$u_2 + v_3 \quad c_{23} = 1 + 6 \quad 5 = 2$
x_{24}	$u_2 + v_4 \quad c_{24} = 1 + 6 \quad 0 = 7$
x_{33}	$u_3 + v_3 \quad c_{33} = 0 + 6 \quad 0 = 6$
x_{34}	$u_3 + v_4 \quad c_{34} = 0 + 6 \quad 5 = 1$
x_{41}	$u_4 + v_1 \quad c_{41} = 1 + 6 \quad 5 = 0$
x_{42}	$u_4 + v_2 \quad c_{42} = 1 + 5 \quad 0 = 4$
x_{44}	$u_4 + v_4 \quad c_{44} = 1 + 6 \quad 0 = 5$
x_{51}	$u_5 + v_1 \quad c_{51} = 0 + 6 \quad 0 = 6$
x_{52}	$u_5 + v_2 \quad c_{52} = 0 + 5 \quad 4 = 1$

Hemos encontrado que los $z_{ij} - c_j \geq 0$ para cada una de las variables no basicas entonces la solucion indicada es optima La funcion objetivo tiene un valor de 109 (vease pag 45)

CAPITULO II

EL PROBLEMA DE TRANSPORTE EN LA TEORIA DE GRAFOS

1 Conceptos preliminares para el enfoque en la teoría de Grafos

Para el enfoque en la teoria de grafos utilizaremos los conjuntos de indices $\mathbf{I} = \{1\ 2 \quad \mathbf{m}\}$ y $\mathbf{J} = \{1\ 2 \quad \mathbf{n}\}$

A los indices $i \in \mathbf{I}$ $j \in \mathbf{J}$ le asignaremos los numeros enteros no negativos $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b_j}$ Sea $\mathbf{L} = \{(i, j) / i \in \mathbf{I}\ j \in \mathbf{J}\}$ a cada par $(i\ j) \in \mathbf{L}$ le atribuiremos los numeros enteros $\mathbf{c_{ij}}$ y v_{ij} y la variable x_{ij}

Suponiendo que $\mathbf{c_{ij}} \geq 0\ \forall\ (i\ j) \in \mathbf{L}$ se pide la solucion en numeros enteros del sistema

$$
(16) \quad \begin{cases}
\text{a} \quad \sum_{i}^{m} x_{ij} = \mathbf{b_j} & \forall\, j \in \mathbf{J} \\
\text{b} \quad \sum_{j\ 1} x_{ij} = \mathbf{a_i} & \forall i \in \mathbf{I} \\
\text{c} \quad 0 \leq \mathbf{x_{ij}} \leq \mathbf{c_{ij}} &
\end{cases}
$$

que haga maxima la expresion

$$\text{d} \quad \sum_{i}^{m} \sum_{j\ 1} v_{ij}\mathbf{x_{ij}}$$

Es claro que

$$\text{e} \quad \sum_{i}^{m} a_i = \sum_{j\ 1} b_j = \mathbf{0}$$

Se observa que solamente las condiciones c son diferentes a las usuales Las cantidades $\mathbf{c_{ij}}$ que aparecen en estas condiciones pueden ser interpretadas como las **capacidades** de los caminos que unen los puntos i y j $1 \leq i \leq \mathbf{m}$, $1 \leq j \leq \mathbf{n}$ en un intervalo de tiempo dado

Antes de abordar el problema, revisaremos algunos prerrequisitos

Definicion 2

Diremos que hay un **grafo** cada vez que tengamos dados un conjunto **X** y una relacion Γ de **X** en **P(X)**

Los elementos del conjunto seran denominados **vértices o nodos** y un par ordenado **(x y)** de vertices **X** tales que **y ∈ Γx** se llamara **arco** del grafo que en este caso sera un **grafo orientado** si el par (x y) es no ordenado se llamara arista y en ese caso el grafo es no orientado Para referirnos a un grafo usaremos la notacion **G = (X U)** donde **U** es el conjunto de todos los arcos del grafo Es claro que Γ determina en modo unico a **U** y viceversa Trabajaremos solamente con grafos orientados y finitos

Llamaremos **camino** en el grafo **G = (X U)** a una serie de arcos (μ_1 μ_2 μ_p) con la propiedad de que la extremidad final de cada uno coincide con el origen del siguiente Si la extremidad final del arco μ_p coincide con la inicial del arco μ_1 diremos que el camino es un **circuito** Llamaremos **longitud de un camino** al numero de arcos que lo constituye Un circuito de longitud 1 sera denominado **bucle**

Definición 3

Llamaremos **Red de transporte** a un grafo orientado finito y sin bucle en el que cada arco está asociado un numero **c (μ) ≥ 0** que denominaremos **Capacidad de Arco** y donde

a Existe un unico vértice $\mathbf{x_0}$ tal que $\Gamma^{-1}\mathbf{x_0} = \varnothing$ que llamaremos **entrada a la red** y

b Existe un unico vertice **z** tal que Γ = ∅ que denominaremos **salida de la red**

Definición 4

Consideramos una red **R = (X, U)** y **x ∈ X** Sea **W** el conjunto de los arcos incidentes con el vertice $\mathbf{x}$ y orientados hacia $\mathbf{x}$ y W^+_x el conjunto de los arcos incidentes con y orientados hacia el exterior de $\mathbf{x}$ Diremos que una funcion φ definida en U con valores no negativos es un **Flujo** para esta red si

$$\text{(17)}\quad \begin{aligned} &\mathbf{a}\quad \sum_{u \in W} \varphi(u) \quad \sum_{u \in W^+} \varphi(u) = 0 \\ &\mathbf{b}\quad 0 \leq \varphi(u) \leq c(u) \end{aligned}$$

De (17 a) resulta que

$$\mathbf{c}\quad \sum_{u \in W} \varphi(u) = \sum_{u \in W^+_{x_0}} \varphi(u) = v(\varphi\ )$$

El numero $\mathbf{v}\ (\varphi\ )$ definido por (17 c) será llamado **valor del flujo** y representa la cantidad de materia que llega $\mathbf{z}$ (esto ultimo es una interpretacion)

La condicion (17 a) es conocida como la **Ley de Conservación del flujo** En muchos problemas practicos se puede recurrir para su solución por medio de redes de transporte solamente si el flujo buscado satura los arcos de salida

Sea R una red de transporte con entrada $\mathbf{x}_0$ y salida $\mathbf{z}$ en la cual denotaremos con $\mathbf{X}$ al conjunto de los vertices con $\mu_{ij}= (\mathbf{x}_i\ \ \mathbf{x}_j)$ los arcos con $W^-_{x_i}$ el conjunto de los arcos incidentes interiormente con $\mathbf{x}_i$ Para $S \subset X$, W^+_s es el conjunto de los arcos $(\mathbf{x}\ \ \mathbf{x}_k)$ con $\mathbf{x} \in S$ $\mathbf{x}_k \notin S$ es decir el conjunto de los arcos incidentes hacia el exterior del conjunto S Se trata de los arcos que entran a S y W^-_s el de los arcos $(\mathbf{x}_i\ \ \mathbf{x}_k)$ con $\mathbf{x} \notin S$ $x_k \in S$ O sea, W_S^- agrupa los arcos que salen de S Supondremos tambien una capacidad $\mathbf{c}_j$ para todo arco $\mathbf{u}_j$

Definicion 5

Diremos que el conjunto W es un **Corte de la Red** si $\mathbf{x_0} \notin \mathbf{S}$ y $\mathbf{z} \in \mathbf{S}$ Denotaremos la **Capacidad del Corte** W con $C(W\ )$ y por definicion

$$C(W\ ) = \sum_{\mu\ W} C(u)$$

Dado un corte cualquier flujo tiene que atravesarlo para llegar de $\mathbf{x_0}$ a z Este flujo puede saturar algunos arcos y otros no Si todos los arcos de un corte son saturados tendriamos que v (φ) = $C(W\ )$ de lo contrario v (φ) ≤ $C(W_s\ )$ Resulta que si encontramos un flujo φ y un corte W_s tal que v (φ) = $C(W\ )$ significa que hemos encontrado un flujo maximal y al mismo tiempo un corte de capacidad minima Es mas se demuestra el conjunto de todos los cortes de una red admite al menos uno con capacidad minima

1 1 Teorema de Ford Fulkerson

Teorema 3

En una red de transporte dada, el valor maximo del flujo es igual a la capacidad minima de los cortes

$$\textbf{(18)} \qquad \max_{\boldsymbol{\varphi}} v(\varphi) = \min_{\substack{x\ \notin S \\ z \in S}} C(W\ )$$

La relacion (18) define entonces el flujo maximal

Es muy conocido el algoritmo de Ford – Fulkerson para encontrar un flujo maximal en una red cualquiera utilizando el teorema 1

2 Metodo Hungaro

Consideramos el problema 16 Podemos suponer que los numeros v_{ij} son positivos pues de no ser asi $\exists\ v_0 > 0\ tal\ que\ v_0 > minv_{ij_{i\,j}}$

con $\theta_{ij} > 0\ y\ \theta_{ij} = v_{ij} + v_0$

$\rightarrow v_{ij} = \theta_{ij} - v_o$

$\rightarrow v_{ij} = \theta_{ij} - v_o$

$$\rightarrow \sum v_{ij} x_{ij} = \sum \theta_{ij}\, x_{ij} - \sum v_0 \sum x_j$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} v_{ij} x_{ij} = \sum \theta_{ij} x_{ij} - v_0 \sum x_{ij}$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} v_{ij} x_{ij} = \sum_{j}\sum_{i} \theta_{ij} x_{ij} - v_o \sum_{i}^{m}\sum_{j}^{n} x_{ij}$$

Haciendo

$$\sum_{i}^{m}\sum_{j}^{n} x_{ij} = a_i$$

O sea

$$\sum_{i}^{m}\sum_{j}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i = k$$

tenemos que

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} v_{ij} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \theta_{ij} x_{ij} - v_o k$$

de donde resulta que la expresion

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} v_{ij}\, x_{ij}$$

alcanza su maximo para aquellos valores que hacen maxima la expresión

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \theta_{ij} x_{ij}$$

3 Modelación en Grafos

Consideramos el grafo simple $G = (X \ \ Y \ \ U)$ en el que $X = \{x_1 \ \ x_2 \ \ \ x_m\}$ $Y = \{y_1 \ \ y_2 \ \ \ y_n\}$ y $(x \ \ y_j) \in U \Leftrightarrow (\imath \ \jmath\ ) \in L$

Transformamos G en una red de transporte R introduciendo una entrada x_0 que unimos con todas las x y una salida z con la que se asumen todas las y_j Asignaremos respectivamente las capacidades

$$C(x_0 \ x_i) = a \text{ y } C(y_j \ z) = b_j \quad (\forall \imath \in I \ \forall \jmath \in J)$$

A los arcos $(x \ \ y_j)$ tomados de **G** le atribuimos las capacidades $C(x \ \ y_j) = c_j$ y le asignaremos los numeros v_j

Identificando el flujo φ_j como variable resulta que la ley de la conservacion del flujo y la condicion **a** del problema nos obligan a tomar para cualquier arco de salida (y z) la componente de flujo $\varphi\ (y_j \ z) = b_j = c(y_j \ z)$ o sea que los arcos de salida seran todos saturados entonces el flujo sera maximal Analogamente $\varphi(x_0 \ x\ ) = a = c(x_0 \ x\ )$ luego cualquier flujo solucion del problema satura tambien los arcos de entrada Hemos reencontrado así la condición (17)

Si los numeros $a \ \ b_j$ y c_j que son las capacidades de los arcos cumplen esta condicion entonces las soluciones del problema de transporte son dadas por los flujos maximales (flujos con el mismo valor pueden diferir en sus componentes sobre los arcos) de R que hacen máxima (o minima) la suma $\sum_{1}^{m} \sum_{j\ 1} v_{ij} x_{ij}$

El algoritmo a que llegaremos para la solucion del problema de transporte resuelve al mismo tiempo otro problema que denominaremos **dual** del primero para su formulacion introduciremos la siguiente nocion

Definición 6

Sean A y B los conjuntos de los arcos de entrada y respectivamente de salida en R Cualquier funcion γ con valores no negativos y dominio $A \cup U \cup B$ se llamara **Presupuesto** del problema de transporte si a lo largo de cualquier camino de x_o a z se satisface la condicion

$$\gamma(x_o\ x_i) + \gamma(x_i\ y_j) + \gamma(y_j\ z) \geq v_{ij} \quad (i \in I\ j \in J)$$

Haciendo

$$\gamma(x_o\ x_i) = \alpha_i \quad \gamma(x_i\ y_j) = \gamma_{ij}\ y \quad \gamma(y_j\ z) = \beta_j$$

usaremos la expresion mas simple para la condicion anterior

$$\alpha_i + \gamma_{ij} + \beta_j \geq v_{ij} \qquad (i \in I\ j \in J)$$

Definición 7

La capacidad de un presupuesto dado se denota $C(\gamma)$ y se define como sigue

$$\text{(19)} \qquad C(\gamma) = \sum_{i=1}^{m} a_i \alpha_i + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1} c_{ij}\gamma_{ij} + \sum_{j=1} b_j \beta_j$$

El dual del problema de transporte (16 a d) pedira encontrar el presupuesto de capacidad minima Llamaremos minimal a este presupuesto

Se denotara con $v[\varphi]$ el valor de la expresion $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1} v_{ij} x_{ij}$ para un flujo cualquiera la relación entre el problema de transporte y su dual se precisa en la siguiente proposicion

Proposicion 1

Para cualquier flujo φ en R y cualquier presupuesto γ tenemos que

(20) $\mathbf{v\,[\,\varphi\,] \leq C(\gamma)}$

Demostracion

Se sabe que $\mathbf{v_j \leq \alpha + \gamma_{ij} + \beta_j}$

entonces

$\mathbf{v_{ij}\varphi_j \leq \alpha_i\,\varphi_j + \gamma_j\,\varphi_j + \beta_j\,\varphi_j}$

$$\mathbf{v\,[\varphi\,] = \sum \sum_j v_{ij}\,\varphi_{ij} \leq \sum \alpha_i \sum_j \varphi_j + \sum \sum_j \gamma_{ij}\,\varphi_{ij} + \sum_j \beta_j \sum_j \varphi_j}$$

por $\sum_i^m x_{ij} = \mathbf{b_j}\ \ \forall\, \mathbf{j} \in \mathbf{J}$ y por $\sum_{j\ i} x_{ij} = \mathbf{a_i}\ \ \forall \mathbf{i} \in \mathbf{I}$ y como los flujos de los arcos de U son

acotados superiormente por sus capacidades

$\mathbf{v\,[\varphi] \leq \sum a\,\alpha_i + \sum \sum_j C_j\,\gamma_j + \sum_j b_j\beta_j = C(\gamma)}$ es decir $\mathbf{v\,[\,\varphi\,] \leq C(\gamma)}$

Corolario 1

Si encontramos en R un flujo φ y un presupuesto γ tales que v[φ]= C(γ) entonces φ es una solucion del problema del transporte y γ es una solucion de su dual

Demostración

Es inmediata de la proposicion anterior

4 ALGORITMO PARA ENCONTRAR UN PRESUPUESTO MINIMAL

Se utilizara las notaciones anteriores para asegurarnos de que los numeros α β_j y γ_{ij} asignados a los arcos respectivos constituyen un presupuesto en R.

Asignaremos

$$\alpha_i = \min_j v_{ij}$$

(21) $$\beta_j = \max_i (v_{ij} \quad \alpha_i)$$

$$\gamma_{ij} = \max \{0 \quad v_{ij} \quad \alpha_i \quad \beta_j\}$$

En efecto si $v_{ij} \quad \alpha_i \quad \beta_j = 0$ y $\gamma_{ij} = 0$ resulta que $\alpha_i + \gamma_{ij} + \beta_j = v_{ij}$ Si $v_{ij} \quad \alpha_i \quad \beta_j < 0$ y $\gamma_{ij} = 0$ obtenemos que $\alpha_i + \gamma_{ij} + \beta_j > v_{ij}$ Finalmente cuando $\gamma_{ij} = v_{ij} \quad \alpha_i \quad \beta_j > 0$ se reencuentra la igualdad $\alpha_i + \gamma_{ij} + \beta_j = v_{ij}$ De manera que en todos los casos se satisface la condición $\alpha_i + \gamma_{ij} + \beta_j \geq v_{ij}$ $(i \in I \quad j \in J)$ vista anteriormente (en la definicion de presupuesto)

Siempre resulta que adoptando cualquier presupuesto el conjunto U de los arcos de G se puede descomponer en la siguiente particion

$$C = \{(i \quad j)/ v_{ij} = \alpha_i + \beta_j \quad \gamma_{ij} = 0\}$$

(22) $$D = \{(i \quad j)/ v_{ij} < \alpha_i + \beta_j \quad \gamma_{ij} = 0\}$$

$$E = \{(i, j)/ v_{ij} > \alpha_i + \beta_j \quad \gamma_{ij} > 0\}$$

Las consideraciones anteriores son suficientes para establecer un algoritmo que nos permitira solucionar el problema de transporte con la ayuda de su dual en base a las proposiciones que se iran anunciando

Supongamos que se ha adoptado un presupuesto γ con el cual se introducira en el conjunto U de los arcos de G la particion (22) en base a la cual se hará las siguientes modificaciones en la red R

1 Reemplazamos las capacidades a_i de los arcos de entrada por a_i, donde

$$(23) \qquad a_i = \mathbf{a} \sum_{(\ j) \in F} \mathbf{C}_j \qquad (\forall\, \mathbf{i} \in \mathbf{I})$$

2 Reemplazamos las capacidades b_j de los arcos de salida por $\mathbf{b}_j$ con

$$(24) \qquad b_j = \mathbf{b}_j \sum_{(\ j)\ E} C_j \qquad (\forall\, \mathbf{j} \in \mathbf{J})$$

Teniendo en cuenta que $\sum_{i}^{m} a_i = \sum_{j\ i} b_j$ resulta que $\sum_{i}^{m} a \ = \sum_{j\ i} b_j$

2 A los arcos $(\mathbf{x}_i\ \mathbf{y}_j) \in \mathbf{U}$ le asignamos las capacidades

$$(25) \qquad \mathbf{C}_j = \begin{cases} \mathbf{c}_j & \mathbf{si}\ (\mathbf{i}\ \mathbf{j}) \in \mathbf{C} \\ \\ \mathbf{0} & \mathbf{si}\ (\mathbf{i}\ \mathbf{j}) \in (\mathbf{D}\ \mathbf{U}\ \mathbf{E}) \end{cases}$$

Denotaremos con R^1 la red con las capacidades asi modificadas Es evidente que a un presupuesto dado le corresponde una transformacion R^1 de la red unica y bien determinada Se usara entonces R^1 para la siguiente proposicion

Proposicion 2

Si en la red R^1 asociada al presupuesto γ existe un flujo ψ que satura todos los arcos de salida, entonces γ es un presupuesto de capacidad minima en R

Demostracion

Se considerara en R el flujo cuyas componentes saturan los arcos de salida (y de entrada) para los $(\mathbf{x}_i\ \mathbf{y}_j) \in \mathbf{U}$

$$(26) \qquad \varphi_j = \begin{cases} \psi_{ij} & \mathbf{si}\ (\mathbf{i}\ \mathbf{j}) \in (\mathbf{C} \cup \mathbf{D}) \\ \mathbf{C}_{ij} & \mathbf{si}\ (\mathbf{i}\ \mathbf{j}) \in \mathbf{E} \end{cases}$$

Para este flujo se tiene que $v[\varphi] = \sum_{(i,j)\in(C\cup D)} v_{ij}\psi_{ij} + \sum_{(i,j)\in E} v_{ij} C_{ij}$

Pero $C = \{(i,j)/\ v_{ij} = \alpha_i + \beta_j\quad \gamma_{ij} = 0\}$ $D = \{(i,j)/\ v_{ij} < \alpha_i + \beta_j\quad \gamma_{ij} = 0\}$

$E = \{(i,j)/\ v_{ij} > \alpha_i + \beta_j\quad \gamma_{ij} > 0\}$ y resulta que en los arcos $(i,j) \in C$ tenemos que $v_{ij} = \alpha_i + \beta_j$ y de (25) puesto que los arcos $(i,j) \in D$ tienen capacidad nula en R^1 se deduce que $(i,j) \in D \Rightarrow \psi_{ij} = 0$ luego

$$v[\varphi] = \sum_{(i,j)\in C} (\alpha_i + \beta_j)\psi + \sum_{(i,j)\in E} v_{ij}C_{ij}$$

Por hipotesis ψ satura los arcos de salida de R^1 asi entonces

$$v[\varphi] = \sum \alpha_i a \quad + \sum_j \beta_j b_j + \sum_{(i,j)\in E} v_{ij}C_{ij}$$

$$v[\varphi] = \sum \alpha a \quad \sum \alpha_i \sum_{(i,j)\in E} C_{ij} + \sum_j \beta_j b_j \quad \sum_j \beta_j \sum_{(i,j)\in E} C_{ij} + \sum_{(i,j)\in E} v_{ij}C_{ij}$$

Para los arcos $(i,j) \in E$ se tiene que $v_{ij} = \alpha + \gamma_{ij} + \beta_j$, luego

$$v[\varphi] = \sum_i \alpha_i a_i - \sum_i \alpha_i \sum_{(ij)\in E} c_{ij} + \sum_j B_j b_j - \sum_j B_j + \sum_{(ij)\in E} (\alpha_{ij} + B_j + \gamma_{ij})\, C_{ij}$$

$$V[\varphi] = \sum \alpha_i a + \sum_j \beta_j b_j + \sum \gamma_{ij} \sum_{(i,j)\in E} C_{ij}$$

$$V[\varphi] = \sum \alpha_i a + \sum_j \beta_j b_j + \sum_{(i,j)\in E} \gamma_{ij}\, C_{ij}$$

De $C = \{(i,j)/\ v_{ij} = \alpha_i + \beta_j\ ,\ \gamma_{ij} = 0\}$, $D = \{(i,j)/\ v_{ij} < \alpha_i + \beta_j\quad \gamma_{ij} = 0\}$ y $E = \{(i,j)/\ v_{ij} > \alpha_i + \beta_j\ ,\ \gamma_{ij} > 0\}$ resulta que el presupuesto no tiene otras componentes γ_{ij} distintas de cero que no sean las asignadas a los arcos $(i,j) \in E$

Entonces $\sum_{(i,j)\in I} \gamma_{ij} C_{ij} = \sum \sum_{j} \gamma_{ij} C_{ij}$ y al comparar el resultado anterior con la definicion de capacidad de presupuesto resulta que $v[\varphi] = C(\gamma)$ El corolario 1 anterior nos permite afirmar que γ es minimal

De esta demostracion se infiere la siguiente afirmacion

Corolario 2

Si en la red $\mathbf{R}^1$ asociada al presupuesto γ existe un flujo ψ que satura todos los arcos de salida, entonces el flujo de G dado por (26) conduce a una solucion del problema de transporte que maximiza la suma $\sum_{i}^{m} \sum_{j=1} v_{ij} x_{ij}$

Observacion 3

1 Es suficiente que se den los numeros α_i y β_j con los cuales queremos formar el presupuesto pues sus componentes en los arcos **U** (de **G**) resultan de la tercera formula (21) que conduce tambien a la particion (22)

2 Para no complicar inutilmente la figura en $\mathbf{R}^1$ podemos prescindir de los arcos $(i,j)\in(D\cup E)$ que tienen capacidad nula eliminandolos se facilita además la tarea de examinar si existe o no en $\mathbf{R}^1$ un flujo que sature los arcos de salida

Proposición 3

Si en la red R^1 asociada al presupuesto γ no existe flujo alguno que sature los arcos de salida entonces se puede encontrar un presupuesto γ' con $C(\gamma') < C(\gamma)$

Demostración

Supongamos que el presupuesto dado por $\gamma_i = min\, v_{ij}$ $\beta_j = \max\ (v_{ij} - \alpha_i)$ y $\gamma_{ij} = \max\{0\ v_{ij} - \alpha_i - \beta_j\}$ no es minimal y sea v(ψ) el valor del flujo maximal de la red parcial R^1 asociada a este presupuesto De acuerdo al teorema Ford Fulkerson existe al memos un corte W^{-}_{T} en $\mathbf{R}^1$ para el que

$$v(\psi) = C(w\ _T)$$

Haciendo

$$\alpha'_i = \begin{cases} \alpha & \text{si } x_i \in T \\ \\ \alpha_{-1} & \text{si } x \notin T \end{cases}$$

(27)

$$\beta'_j = \begin{cases} \beta_j & \text{si } y_j \in T \\ \\ \beta_{j+1} & \text{si } y_j \notin T \end{cases}$$

y calculando los numeros $\gamma_j = \max\{0\ v_{ij}\ \ \alpha'\ \ \beta_j\}$ obtenemos un nuevo presupuesto γ pues

1 Todas sus componentes son no negativas

En efecto si suponemos que todos los v_{ij} son positivos la primera relacion de (21) muestra que $\alpha_i > 1\ (\forall_i)$

2 A lo largo de cualquier camino de x_0 a z tenemos

(28) $\alpha\ + \gamma_j \geq v_{ij}$

Para demostrar esto se observa que con la transformación (27) y teniendo en cuenta (22) resulta que

$$
(29) \qquad \gamma' = \begin{cases} \gamma_j - 1 & \text{si } x_i \in T \quad y_j \notin T \; e(i\ j) \in E \\ \gamma_j + 1 & \text{si } x \notin T \quad y_j \in T \; e(i\ j) \in (C\,U\,E) \\ \gamma_j \text{ en todos los demás casos} & \end{cases}
$$

y así el valor de la expresión $e_{ij} = \alpha_i + \beta_j + \gamma_j$ no puede decrecer por el efecto modificador de (12) mas que en 1 y esto solamente en el caso $(i\ j) \in D$ En efecto la disminución en una unidad de α cuando $x \in T$ es compensada con el aumento en 1 de γ_j cuando $(i,j) \in (CUE)$ y la disminucion en una unidad de γ_j cuando $x_i \in T$ $y_j \notin T$ $e(i\ j) \in E$ se compensa con el aumento en 1 de β_j en este caso

Luego se denota e_{ij} el miembro izquierdo de $\alpha + \gamma_j \geq v_{ij}$ tenemos que $e_j \geq e_j \geq v_{ij}$ cuando $(i,j) \notin D$ y si $(i\ j) \in D$ resulta que $e_j > v_j$ y de esta forma $e_{ij} = e_j - 1 \geq v_{ij}$

Nos queda mostrar que $C(\gamma\ ) < C(\gamma)$ Tenemos que

$$C(\gamma\ ) = \sum a_i\alpha' + \sum_j b_j\beta_j + \sum_j \gamma_{ij}$$

Por (27) y (29) se obtiene que

$$C(\gamma\ ) - C(\gamma) = \sum_{\notin T} a + \sum_{y_j\ T} b_j \quad \sum_{\substack{T \\ y_j\ T \\ (\ j)\ F}} C_{ij} + \sum_{\substack{\notin T \\ y_j\ T \\ (\ j)\ E}} C_j + \sum_{\substack{\notin T \\ y_j\ T \\ (\ j)\ F}} C_{ij}$$

Utilizando $a_i = a_i \quad \sum_{(\ j)\ E} C_{ij}\ (\forall i \in I) \quad b_j = b_j \quad \sum_{(\ j)\ E} C_{ij}, (\forall j \in J)$ y (25) el resultado se transcribe en R^1 como sigue

$$C(\gamma') - C(\gamma) = \sum_{\notin T} a + \sum_{y_j\ T} b'_j + \sum_{\substack{\notin T \\ y_j\ T}} C'_{ij} \quad \text{o sea}$$

$$C(\gamma\ ) - C(\gamma) = \sum a + \sum_{T} a + \sum_{j\ T} b_j + \sum_{\substack{T\\ yj\ T}} C_j$$

Las tres ultımas expresıones sumadas representan la capacıdad del corte w_T y como hıpotesıs el flujo maxımal ψ de R^I no satura los arcos de salıda (y por supuesto tampoco las de entrada) tenemos que

$$v(\psi) = C(w_\Gamma) < \sum a$$

de modo que $C(\gamma\ ) - C(\gamma) = \sum a + C(w_\Gamma) < 0$

Del presupuesto γ y la red R asocıada al mısmo se puede pasar (como acabamos de ver) a otro presupuesto γ que le correspondera una red R de esta a γ y R^{IV} y ası sucesıvamente

En cada etapa el presupuesto decrece y se llega ası a un presupuesto mınımal que nos dara, de acuerdo a la proposıcıon 2 (pg 36) la solucıon del problema de transporte

Este es el algorıtmo buscado Se le da el nombre de Metodo Hungaro puesto que ha sıdo establecıdo y perfeccıonado por Ford Fulkerson y otros autores partıendo de los resultados obtenıdos por H Kuhn

Observacıon 4

Para efectos de cálculo cuando en la red asocıada al presupuesto mınımal exısten varıos cortes con capacıdad ıgual al valor del flujo maxımal que admıte la red preferıremos aquel que contenga menos vertıces de x y más de y Esto aproxımara mas rapıdo al presupuesto mınımal

5 Problema de Aplicacion

Para la siguiente figura N 1 se presenta la red **R** que modela un problema de transporte Los datos estan inscritos en los arcos las capacidades entre parentesis y los numeros v_j en los rombos Obsérvese que se trata del problema 4 3

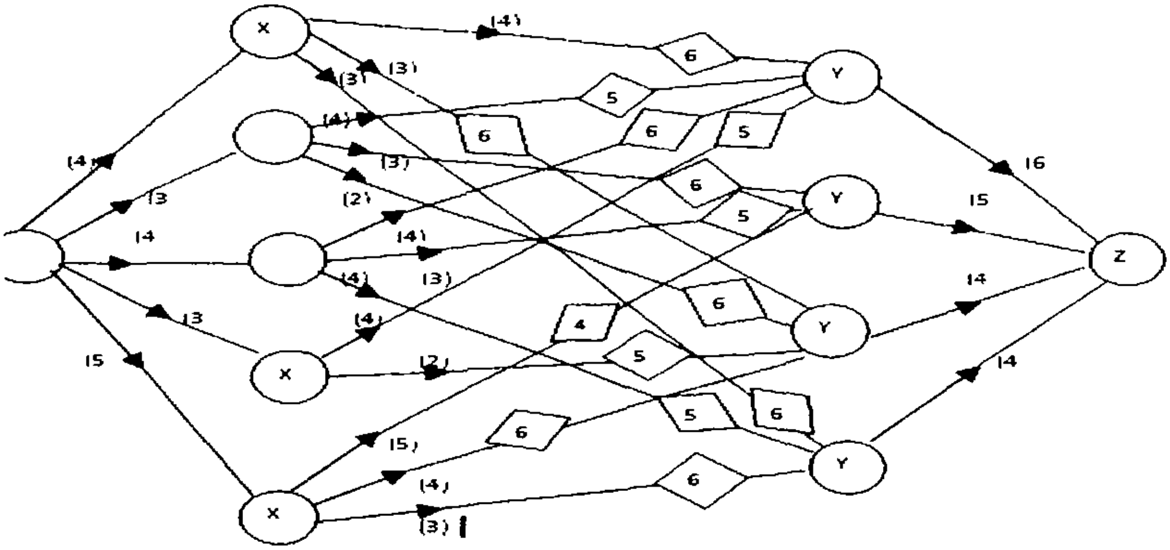

Figura N° 1

Para introducir un presupuesto se proponen las cantidades

$\alpha_1 = 4$ $\alpha_2 = 4$ $\alpha_3 = 4$ $\alpha_4 = 3$ $\alpha_5 = 4$

$\beta_1 = 2$ $\beta_2 = 1$ $\beta_3 = 2$ $\beta_4 = 2$

Con la tercera formula de 21 se obtienen los γ_j (los calculos se detallan en la sección A del anexo) Los ceros con asterisco corresponden en el tablero N 6 al caso $v_j < \alpha_i + \beta_j$ y se toma γ_j=0

Tenemos que (se escribirá (i, j) en lugar de (x_i, y_j)), se tiene entonces la siguiente particion

$C = \{(i, j)/ v_{ij} = \alpha_i + \beta_j \quad \gamma_{ij} = 0\}$

$C = \{(1\ 1)\ (1\ 3)\ (1\ 4), (3, 1)\ (3\ 2), (4\ 1), (5, 3)\ (5\ 4)\}$

$\mathbf{D} = \{(i, j)/ v_{ij} < \alpha_i + \beta_j \quad \gamma_{ij} = 0\} = \{(2\ 1), (2\ 3)\ (3\ 4)\ (5\ 2)\}$

$\mathbf{E} = \{(i, j)/ v_{ij} > \alpha_i + \beta_j \quad \gamma_{ij} > 0\} = \{(2\ 2)\}$

$\beta_1 = 2$	$\beta_2 = 1$	$\beta_3 = 2$	$\beta_4 = 2$	
0		0	0	$\alpha_1 = 4$
0*	1	0 *		$\alpha_2 = 4$
0	0		0*	$\alpha_3 = 4$
0		0		$\alpha_4 = 3$
	0*	0	0	$\alpha_5 = 4$

Tablero N° 6

En la siguiente figura N 2 se introduce el flujo que satura los arcos de entrada y salida de la red parcial **R** En esta red **R'** se omiten los arcos D y E puesto que en la transformacion de las capacidades $C_{ij} = 0$ cuando $(x_i \ x_j) \in D \cup E$ El presupuesto no tiene otras componentes $\gamma_{ij} \neq 0$ que no son las asignadas a los arcos de E y se verifica que el flujo anotado en los arcos (al lado de las capacidades) satura los arcos de salida

Resulta que este presupuesto es minimal y las componentes φ_{ij} con (26) del flujo suministran la solucion del problema de transporte

$\varphi_{11} = 3$	$\varphi_{13} = 0$	$\varphi_{14} = 1$	$\varphi_{21} = 0$	$\varphi_{22} = 3$
$\varphi_{23} = 0$	$\varphi_{31} = 2$	$\varphi_{32} = 2$	$\varphi_{34} = 0$	$\varphi_{41} = 1$
$\varphi_{43} = 2$	$\varphi_{52} = 0$	$\varphi_{53} = 2$	$\varphi_{54} = 3$	

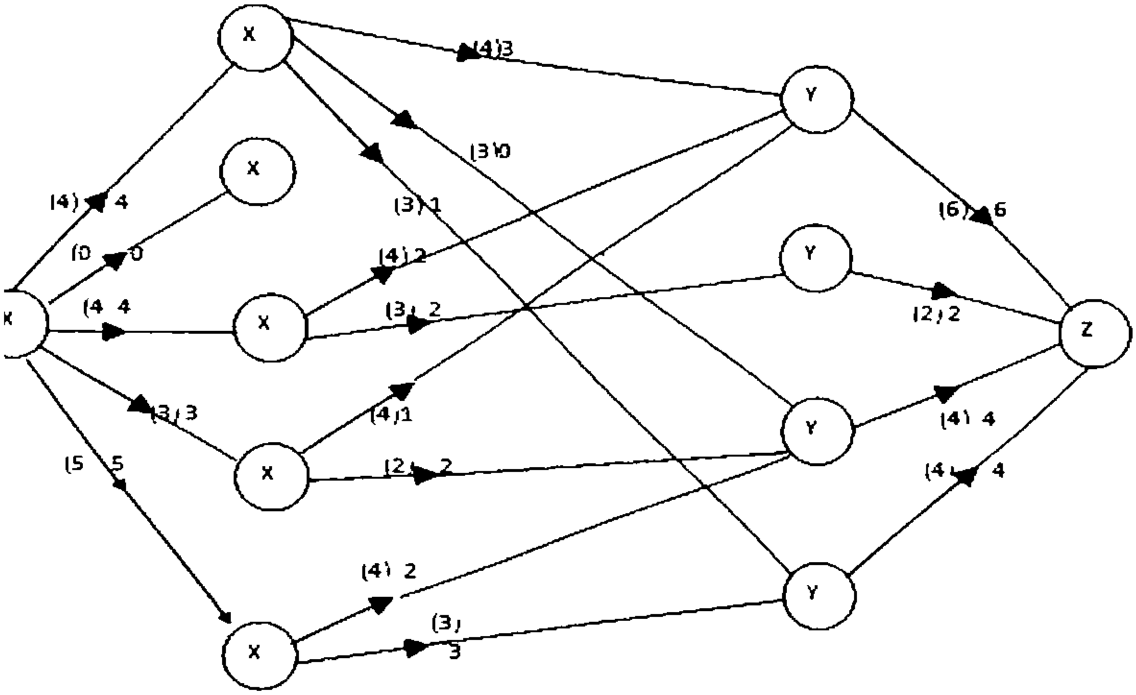

Figura N° 3

Teniendo en cuenta que el arco (x_2 y_2) es omitido por estar en E tiene un flujo $\varphi_{22} = 3$ provoca que el flujo real $\varphi(y_2\ z)$ sea 5 La capacidad de los arcos $(x_0\ x_2)$ y $(y_2\ z)$ sea 3 y 5 respectivamente

El valor de este flujo es

$$v[\psi] = \sum_{j=1}^{4} \varphi(y_j\ z) = (y_1\ z) + (y_2\ z) + (y_3\ z) + (y_4\ z) = 6 + 5 + 4 + 4 = 19$$

En el arco $(x_2\ y_2)$ interviene la componente $\varphi_{22} = 3$ que no aparece en **R** haciendo que

$\boldsymbol{\varphi(y_2\ z) = 5}$

El valor de la funcion objetivo para la solucion encontrada es $v[\psi] = \sum \sum_{j} v_{ij}\varphi_{ij}\alpha_i$ =

$$v_{11}\varphi_{11} + v_{12}\varphi_{12} + v_{13}\varphi_{13} + v_{14}\varphi_{14} + v_{21}\varphi_{21} + v_{22}\varphi_{22} + v_{23}\varphi_{23} + v_{24}\varphi_{24} +$$

$v_{31}\varphi_{31} + v_{32}\varphi_{32} + v_{33}\varphi_{33} + v_{34}\varphi_{34} + v_{41}\varphi_{41} + v_{42}\varphi_{42} + v_{43}\varphi_{43} + v_{44}\varphi_{44}$

$+v_{51}\varphi_{51} + v_{52}\varphi_{52} + v_{53}\varphi_{53} + v_{54}\varphi_{54}$

$v[\psi] = \sum \sum_{j} v_j \varphi_j \alpha_i = 109$ Vease la coincidencia en la pg (26)

En la red de la figura N 3 anterior con la formula 21 encontramos que

$\alpha_1 = 6$ $\alpha_2 = 5$ $\alpha_3 = 5$ $\alpha_4 = 5$ $\alpha_6 = 4$

$\beta_1 = 1$ $\beta_2 = 1$ $\beta_3 = 2$ $\beta_4 = 2$ Asi

Los cálculos para obtener los γ_{ij} (se detallan en la sección B del anexo) La partición que obtenemos es

C' = {(2 2) (3 1) (5 3) (5, 4)}
D' = {(1 1) (1 3) (1 4) (2 1) (2 3) (3 2) (3 4), (4 1) (4, 3) (5 2)}
E = {∅}

γ_{ij} =

	$\beta_1 = 2$	$\beta_2 = 1$	$\beta_3 = 2$	$\beta_4 = 2$	
	0*		0*	0*	$\alpha_1 = 6$
	0*	0	0*		$\alpha_2 = 5$
	0	0*		0*	$\alpha_3 = 5$
	0*		0*		$\alpha_4 = 5$
		0*	0	0	$\alpha_5 = 4$

Tablero N ° 7

Ahora elımınaremos los arcos D y E porque tıenen capacıdades nulas Se obtıene la red de la figura N 3

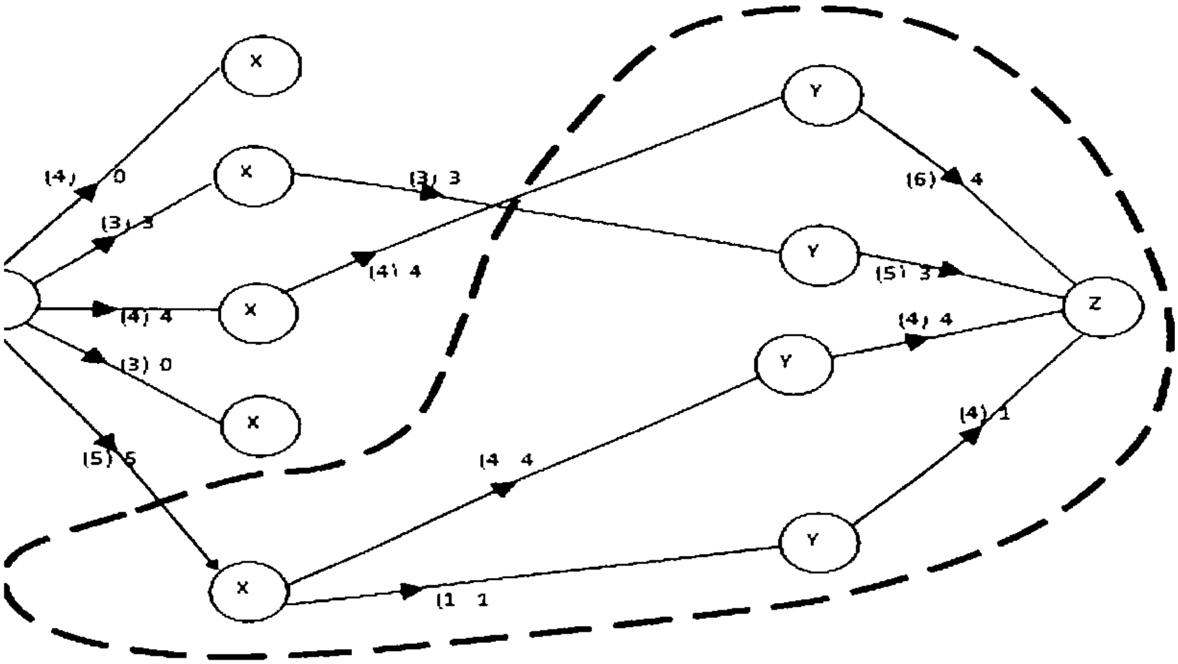

Fıgura N° 3

Las capacıdades de los arcos de entrada y salıda quedan sın modıficarse puesto que E = ϕ

Las capacıdades aparecen anotadas en parentesıs y el valor del flujo maxımal es **v [Ø] = 12**

Exısten varıos cortes con capacıdad 12 Podrıamos tomar

$\mathbf{T} = \{ x_5\ y_1\ y_2\ y_3\ y_4\ z \}$

$\mathbf{T} = \{ x_3\ x_5, y_1\ y_2\ y_3\ y_4\ z \}$

$\mathbf{T} = \{ x_2\ x_3\ x_5, y_1\ y_2, y_3\ y_4, z \}$

Tomando el conjunto $\mathbf{T} = \{x_5\ y_1, y_2\ y_3\ y_4\ z \}$ que tıene menos vertıces y aplıcando las transformacıones ıntroducıdas en la demostracıon de la proposıcıon 3 se obtıene

$\alpha_1 = 5 \qquad \alpha_2 = 4 \qquad \alpha_3 = 4 \qquad \alpha_4 = 4 \qquad \alpha_5 = 4$

$\beta_1 = 1 \qquad \beta_2 = 1 \qquad \beta_3 = 2 \qquad \beta_4 = 2$

Luego

$\beta_1 = 1 \qquad \beta_2 = 1 \qquad \beta_3 = 2 \qquad \beta_4 = 2$

γ_{ij} =

0		0*	0*	$\alpha_1 = 5$
0	1	0*		$\alpha_2 = 4$
1	0		0*	$\alpha_3 = 4$
0		0*		$\alpha_4 = 4$
	0*	0	0	$\alpha_5 = 4$

Tablero N° 8

Los calculos de los γ_{ij} α_i β_j se encuentran en la seccion C del Anexo

Resulta que

C = {(1 1),(2 1) (3,2) (4 1) (5 3) (5 4)}

D = {(1 3) (1,4) (2 3) (3 4) (4 3) (5 2)}

E = {(2 2) (3 1)}

La red **R** ' asociada al presupuesto γ se representa seguidamente en la figura N° 4 Se puede observar que ahora si estan modificadas ciertas capacidades en los arcos de entrada pues E no es vacío El flujo maximal ψ inscrito en la figura, tiene valor v (ψ) = 7 y no satura todos los arcos terminales El corte dado por el conjunto { x_2, x_3, x_5, y_2, y_3, y_4, z } de **R** '' con capacidad 7 es el que conduce al presupuesto minimal usado en ejemplo anterior Con el corte dado por **T''**= { x_3 x_5 y_2 y_3 z } que tiene la misma capacidad se obtiene el presupuesto minimal que se detalla inmediatamente después de la figura N 4 correspondiente a la red R que nos ocupa

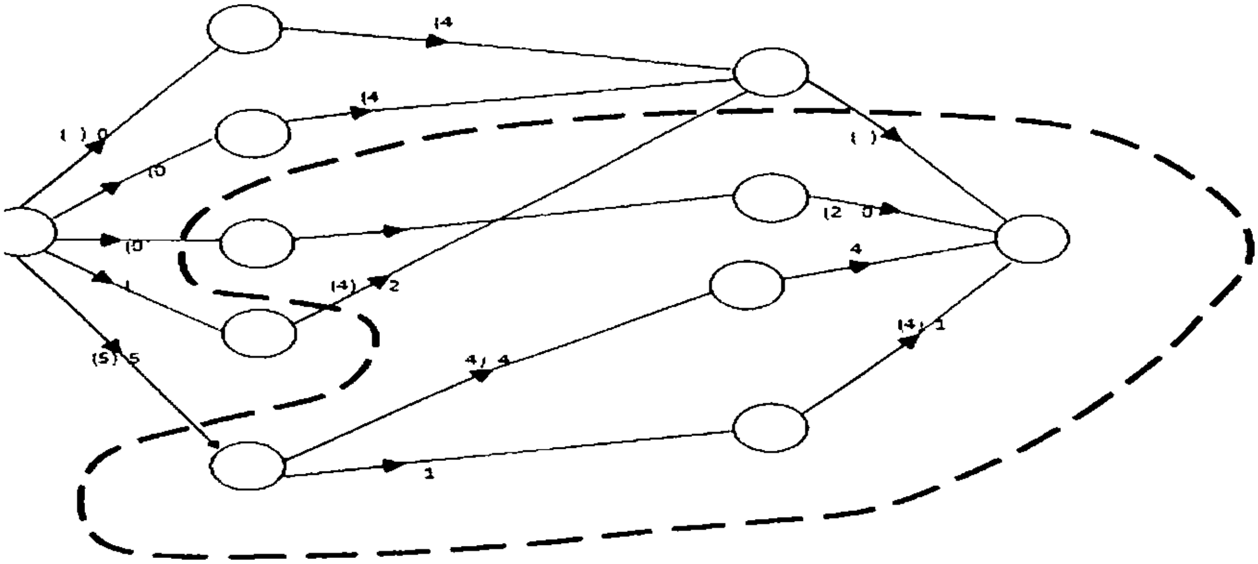

Figura N° 4

$\alpha''_1 = 4$ $\alpha'_2 = 3$ $\alpha_3 = 4$ $\alpha'_4 = 3$ $\alpha_5 = 4$

$\beta''_1 = 2$ $\beta_2 = 1$ $\beta''_3 = 2$ $\beta_4 = 2$

Los calculos de los γ_j se encuentran desarrollados en la seccion C del Anexo

La tabla N 7 muestra los valores de los γ_{ij}

La nueva red estara formada por los siguientes arcos

C''={ (1, 1) (1 3) (1, 4), (2, 1), (2, 3) (3, 1), (3 2) (4 1), (4, 3), (5 3) (5 4) }

D''= { (3 4) (5, 2) } y

E'' = { (2, 2) }

$\beta_1 = 2 \quad \beta'_2 = 1 \quad \beta_3 = 2 \quad \beta_4 = 2$

$\gamma_{ij} =$

0		0	0	$\alpha_1 = 4$
0	2	0		$\alpha_2 = 3$
0	0			$\alpha_3 = 4$
0		0		$\alpha_4 = 3$
	0*	0	0	$\alpha'_5 = 4$

Tablero N° 9

La red **R** asociada a este presupuesto que aparece a continuacion en la figura 5 nos proporciona la solución del problema

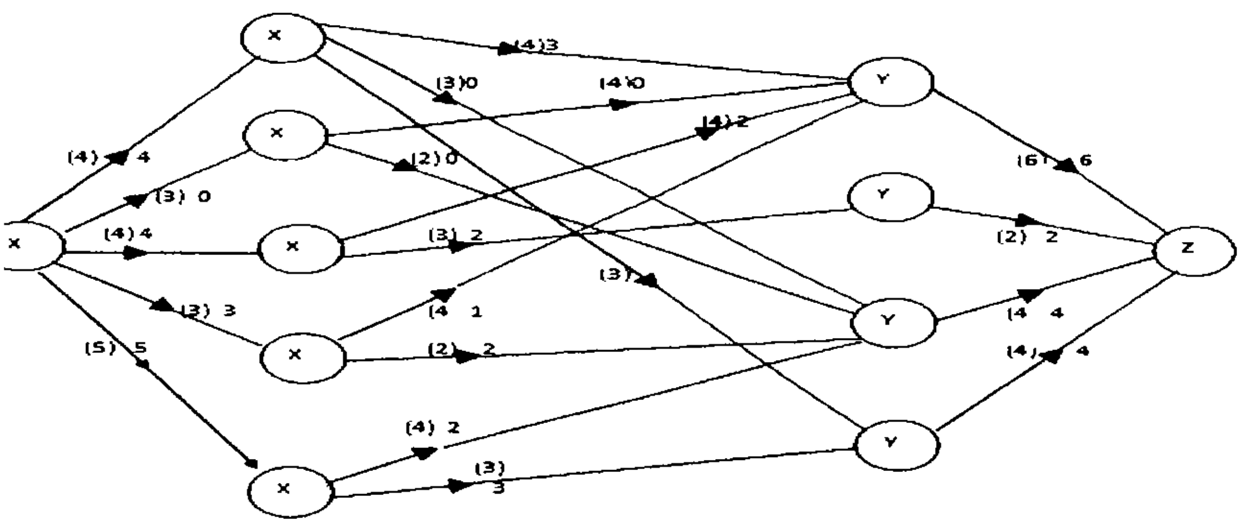

Figura N° 5

CAPITULO III

PROBLEMA DE HITCHCOCK

1 Problema de Hitchcock

Si en la red simple R la capacidad c_j con el arco (x y_j) tienden a∞ el problema de transporte definido se transforma en el problema de Hitchock y las componentes γ_{ij} se hacen nulas así la capacidad

$$C(\gamma) = \sum_{i}^{m} a\,\alpha_i + \sum_{i}^{m} \quad \sum_{j\,1} c_j \gamma_j + \sum_{j\,1} b_j\, \beta_j$$

seria infinita Luego en este caso

$$(30) \qquad C(\gamma) = \sum_{i}^{m} a\,\alpha \;\; + \sum_{j\,1} b_j\, \beta_j$$

y la condicion fundamental de (19) queda como sigue con la notacion de la seccion 3 del capitulo anterior

$$(31) \qquad \alpha_i \;+ \beta_j \geq v_{ij} \;\; (i \in I \;\; j \in J)$$

2 Solucion al Problema de Hitchcock por el metodo de los presupuestos

Resolver el dual del problema de Hitchcock significa encontrar los numeros $\alpha_i \geq 0$ $y\ \beta_j \geq 0$ que definimos a lo largo de cualquier camino de x_0 a Z con la condicion (31) que minimiza la expresión (30) si en el problema se pide el maximo de la expresion $\sum_i \sum_j v_{ij}\, \varphi_{ij}$ donde φ es el flujo maximal en R

Llamaremos minimal a cualquier presupuesto que sea solucion de este problema dual

A cualquier presupuesto minimal o no le asociamos una red parcial R deducida de R suprimiendo los arcos para los cuales

(32) $$\alpha_i \quad + \quad \beta_j \; < \; v_{ij}$$

y denotamos con ψ el flujo maximal de R

Proposición 4

Si en la red R asociada al presupuesto γ existe un flujo ψ que satura todos los arcos de salida, entonces γ es un presupuesto minimal en R

Demostración

Denotamos genericamente con u a los arcos de R En esta red consideramos el flujo ψ definido por

(33) $$\varphi(u) = \begin{cases} \psi(u) & \text{si } u \in R \\ & \\ 0 & \text{si } u \notin R \end{cases}$$

Los arcos de entrada y de salida son los mismos y tienen las mismas capacidades en R y en R luego $\varphi(u)$ los satura, entonces sera un flujo maximal en R Por otro lado consideremos la expresion

(34) $$v[\varphi] = \sum_i \sum_j v_{ij}\, \varphi_{ij}$$

En los arcos u = (ı ȷ) $\notin$ R tenemos $\varphi(u) = 0$ y en los arcos u = (ı ȷ) ϵ R tenemos $v_{ij} = \alpha_i + \beta_j$ y $\varphi(u) = \psi(u)$

Luego $v[\varphi] = \sum_i \sum_j (\alpha_i + \beta_j)\psi_{ij} = \sum_i \alpha_i \sum_j \psi_{ij} + \sum_j \beta_j \sum_i \psi_{ij}$

Como ψ satura, por hıpotesıs todos los arcos de salıda y de entrada, la ley de la conservacıon del flujo nos dıce que

$$\sum_i \psi_{ij} = a_i \qquad\qquad \sum_j \psi_{ij} = b_j$$

Resulta que $v[\varphi] = \sum_i a_i\alpha_i + \sum_j b_j\beta_j = c(\gamma)$ lo que demuestra que γ es un presupuesto mınımal

Proposıcıón 5

Sı en la red R asocıada al presupuesto γ no exıste un flujo que satura los arcos de salıda entonces se puede encontrar otro presupuesto γ tal que

$$C(\gamma\ ) < C(\gamma\,)$$

Demostracıón

Sea ψ un flujo maxımal en R De acuerdo al teorema de Ford – Fulkerson en R exıste un corte w_T^- tal que

(35) $$v(\psi\,) = C\,(w_T^-\,)$$

Suponemos que $\alpha_i > 0$ para todo ı y escrıbımos

$$\alpha_i = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } x \in T \\ \alpha_i \quad 1 & \text{si } x \notin T \end{cases}$$

(36)

$$\beta_j = \begin{cases} \beta_j & \text{si } y_j \in T \\ \beta_j + 1 & \text{si } y_j \notin T \end{cases}$$

Los numeros α_i y β_j definen la condicion

1 $\alpha_i \geq 0$ y $\beta_j \geq 0$ (es evidente)

2 $\boldsymbol{\alpha_i + \beta_j \geq v_{ij}}$

En efecto $\boldsymbol{\alpha_i + \beta_j \geq v_{ij}}$ pues γ es un presupuesto Por otra parte podemos tener $\alpha_i + \beta_j < \alpha_i + \beta_j$ solo en el caso x $\notin$ T si $y_j \in$ T es decir si (i j) $\in w_T^-$ Pero la capacidad de los cortes es finita, como resulta de $v(\psi) = C(w_T^-)$ esta no puede contener arcos de capacidad infinita, si

(37) $(x_i \notin T)$ y $(y_j \in T) \Rightarrow (i,j) \notin R \Rightarrow \alpha_i + \beta_j > v_j$

Entonces como en el caso $\alpha_i + \beta_j \quad (\alpha_i + \beta_j) = 1$ resulta en todos los casos inclusive este $\boldsymbol{\alpha_i + \beta_j \geq v_{ij}}$ Las condiciones 1 y 2 nos dicen que los numeros α_i y β_j forman un nuevo presupuesto que denotaremos γ y nos queda por demostrar que

(38) $C(\gamma) < C(\gamma)$

O bien $C(\gamma) = \sum_i a_i \alpha + \sum_j b_j \beta_j = C(\gamma) \quad \sum_{x_i \notin T} a_i + \sum_{y_j \notin T} b_j$

$$= C(\gamma) \quad \left[\sum_i a_i - \left(\sum_{x \notin T} a_i + \sum_{y_j \notin T} b_j\right)\right]$$

Como a y b_j son capacidades de los arcos de entrada y respectivamente de salida resulta que el parentesis pequeno $\left(\sum_{x \notin T} a_i + \sum_{y_j \notin T} b_j\right)$ indica que $C(w_T^-) = v(\psi)$ Pero por hipotesis ψ no satura a los arcos de salida, luego tampoco los de entrada, entonces $\sum_i a_i \quad v(\psi) > 0$ de donde resulta $C(\gamma) < C(\gamma)$

3 Algoritmo para resolver el problema de Hitchcock

a Se parte del presupuesto γ dado de (34)

$$\textbf{(39)} \qquad \alpha_i = \min_j v_{ij}$$

$$\beta_j = \max_i (v_{ij} \quad \alpha_i)$$

y se construye la red parcial R asociada a γ Si el flujo maximo de R le satura todos los arcos de salida, entonces la solucion al problema de Hitchcock esta dada de (33)

b Si el flujo maximo de R no satura todos los arcos de salida entonces con la proposicion 2 se busca sucesivamente los presupuestos $\gamma \quad \gamma$ y se le asocia a las redes R R hasta cuando se obtenga uno cuyo flujo sea maximal y sature todos los arcos de salida

Observación 5

a Para deducir γ de γ se supone que $\alpha > 0$ para todo $i \in I$ si todos los v_j son positivos de $\alpha_i = \min_j v_{ij}$ y $\beta_j = \max_i (v_{ij} - \alpha_i)$ resulta que esta condicion se cumple

b Cuando al problema de Hitchcock se pide el flujo que minimiza a $v[\varphi]$ se procede primero con la transformacion de los numeros v_j como en la observacion (2) de la seccion 3 del capitulo II

c No es obligatorio que el presupuesto inicial sea el que se dio en (39) cuando se adopta otro se recomienda que sea elegido de forma tal que la condicion (31) sea respetada en su forma de igualdad para al menos un arco (i,j) a medida que a la red R se le asocia i existen mas arcos de categoria $(x_i\ y_j)$ que permiten llegar al presupuesto minimal de forma mas rapida

4 Problema de aplicación

En la figura N 6 se representa una red simple donde las cantidades de los arcos de entrada y de salida se encuentran en parentesis Los arcos $(x_i\ y_j)$ tienen capacidades ilimitadas y son valorizadas por los numeros v_j encerrados en circulos se exige la variante del flujo maximal que minimiza la expresion $\sum_i \sum_j v_{ij}\,\varphi_{ij}$

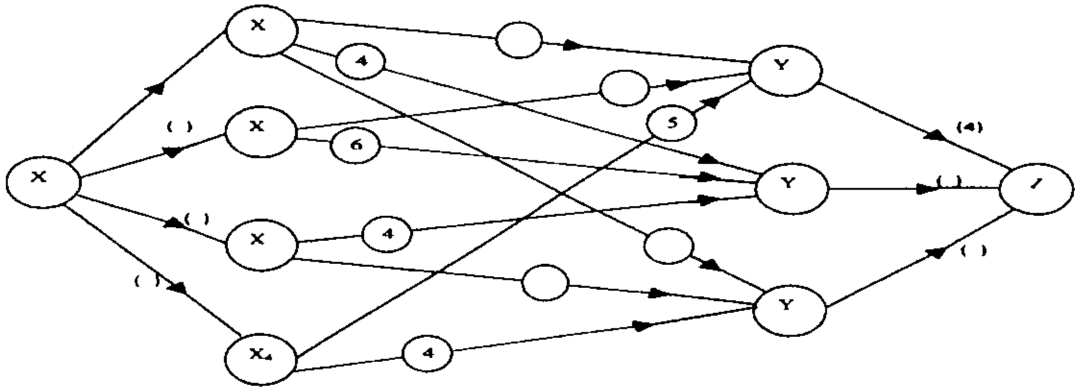

Figura N° 6

Con la parte b de la observacion 5 transformamos los numeros v_{ij} en t_{ij}

$t_{11} = v_{11} = 3$ $\qquad$ $t_{32} = v_{32} = 4$

$t_{12} = v_{12} = 4$ $\qquad$ $t_{33} = v_{33} = 3$

$t_{13} = v_{13} = 5$ $\qquad$ $t_{41} = v_{41} = 5$

$t_{21} = v_{21} = 2$ $\qquad$ $t_{43} = v_{43} = 4$

$t_{22} = v_{22} = 6$

Buscaremos

$V > \max\{v_{11}\ v_{12}\ v_{13}\ v_{21}\ v_{22}\ v_{32}\ v_{33}\ v_{41}\ v_{43}\}$

$V > \max\{3\ 4\ 5\ 2\ 6\ 4\ 3\ 5\ 4\}$

$V > \{6\}$

Tomaremos $V = 7$

Los nuevos $v_j = V - t_j$ seran

$v_{11} =$	$V \quad t_{11} =$	$7 - 3 =$	4
$v_{12} =$	$V \quad t_{12} =$	$7 \quad 4 =$	3
$v_{13} =$	$V - t_{32} =$	$7 \quad 5 =$	2
$v_{21} =$	$V \quad t_{21} =$	$7 - 2 =$	5
$v_{22} =$	$V \quad t_{22} =$	$7 - 6 =$	1
$v_{32} =$	$V \quad t_{32} =$	$7 - 4 =$	3
$v_{33} =$	$V \quad t_{33} =$	$7 - 3 =$	4
$v_{41} =$	$V \quad t_{41} =$	$7 - 5 =$	2
$v_{43} =$	$V \quad t_{43} =$	$7 - 4 =$	3

En la red de la figura N 7 se presenta el flujo maxımal para el cual $\sum_i \sum_j t_{ij} \varphi_{ij}$ es maxımo

Tomamos

$\alpha_1 = 2$ $\alpha_2 = 3$ $\alpha_3 = 2$ $\alpha_4 = 2$

$\beta_1 = 2$ $\beta_2 = 2$ $\beta_3 = 2$

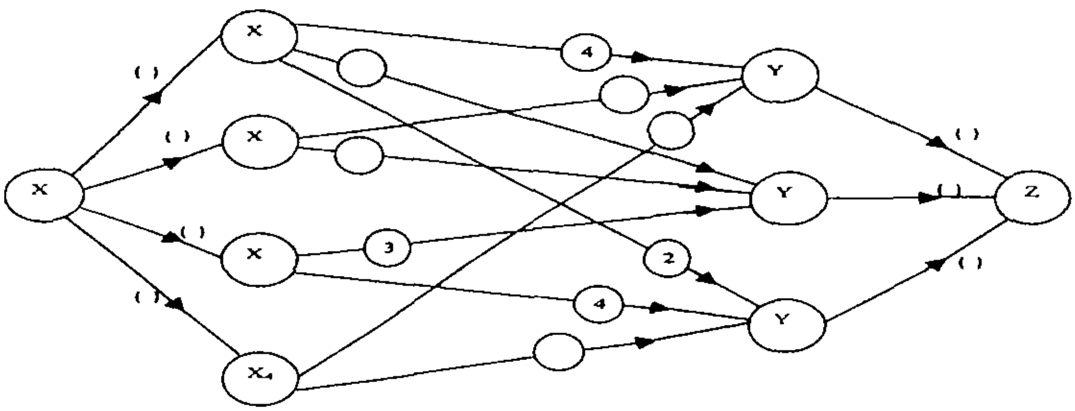

Figura N° 7

Buscaremos los arcos que forman el nuevo corte y cumplen con $\alpha_i + \beta_{j=} t_{ij}$

$\alpha_1 + \beta_1 = t_{11}$	$\Rightarrow$	$2 + 2 =$	4	*
$\alpha_1 + \beta_2 = t_{12}$	$\Rightarrow$	$2 + 2 \neq$	3	
$\alpha_1 + \beta_3 = t_{13}$	$\Rightarrow$	$2 + 2 \neq$	2	
$\alpha_2 + \beta_1 = t_{21}$	$\Rightarrow$	$3 + 2 =$	5	*
$\alpha_2 + \beta_2 = t_{22}$	$\Rightarrow$	$3 + 2 \neq$	1	
$\alpha_3 + \beta_2 = t_{32}$	$\Rightarrow$	$2 + 2 \neq$	3	
$\alpha_3 + \beta_3 = t_{33}$	$\Rightarrow$	$2 + 2 =$	4	*

$\alpha_4 + \beta_1 = t_{41} \quad \Rightarrow \quad 2 + 2 \neq 2$

$\alpha_4 + \beta_3 = t_{43} \quad \Rightarrow \quad 2 + 2 \neq 3$

Los arcos que forman el nuevo corte son (1 1) (2 1) y (3 3)

Así los valores dados de (33) representan un presupuesto y en la figura (8) se representa la red parcial R asociada en la cual el flujo maximal v(ψ) = 8 no satura todos los arcos de salida

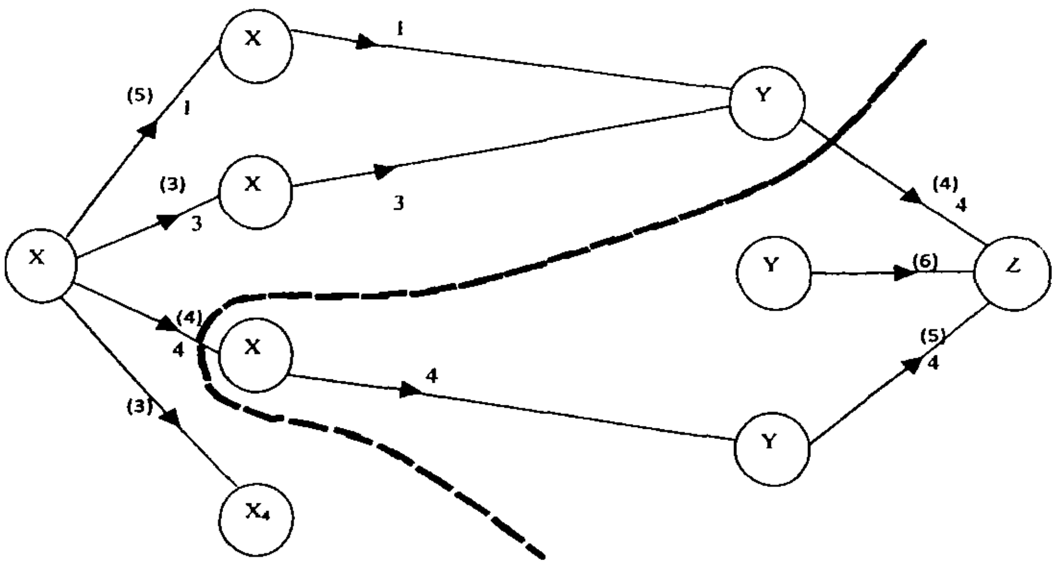

Figura N° 8

El corte marcado en la figura (8) conduce al nuevo presupuesto γ

$$\alpha_i = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } x \in T \\ \\ \alpha_i \quad 1 & \text{si } x \notin T \end{cases} \qquad\qquad \beta_j = \begin{cases} \beta_j & \text{si } y_j \in T \\ \\ \beta_j + 1 & \text{si } y_j \notin T \end{cases}$$

$\alpha_1 = 2 - 1 = 1$ pues $x_1 \notin T$

$\alpha_2 = 3 - 1 = 2$ pues $x_2 \notin T$

$\alpha_3 = 2$ pues $x_3 \in T$

$\alpha_4 = 2 - 1 = 1$ pues $x_4 \notin T$

$\beta_1 = 2 + 1 = 3$ pues $y_1 \notin T$

$\beta_2 = 2$ pues $y_2 \in T$

$\beta_3 = 2$ pues $y_3 \in T$

Así el nuevo presupuesto γ estara compuesto por

$\alpha_1 = 1$ $\qquad\qquad$ $\beta_1 = 3$

$\alpha_2 = 2$ $\qquad\qquad$ $\beta_2 = 2$

$\alpha_3 = 2$ $\qquad\qquad$ $\beta_3 = 2$

$\alpha_4 = 1$

Lo que conduce a la red R que se muestra en la figura N° 9

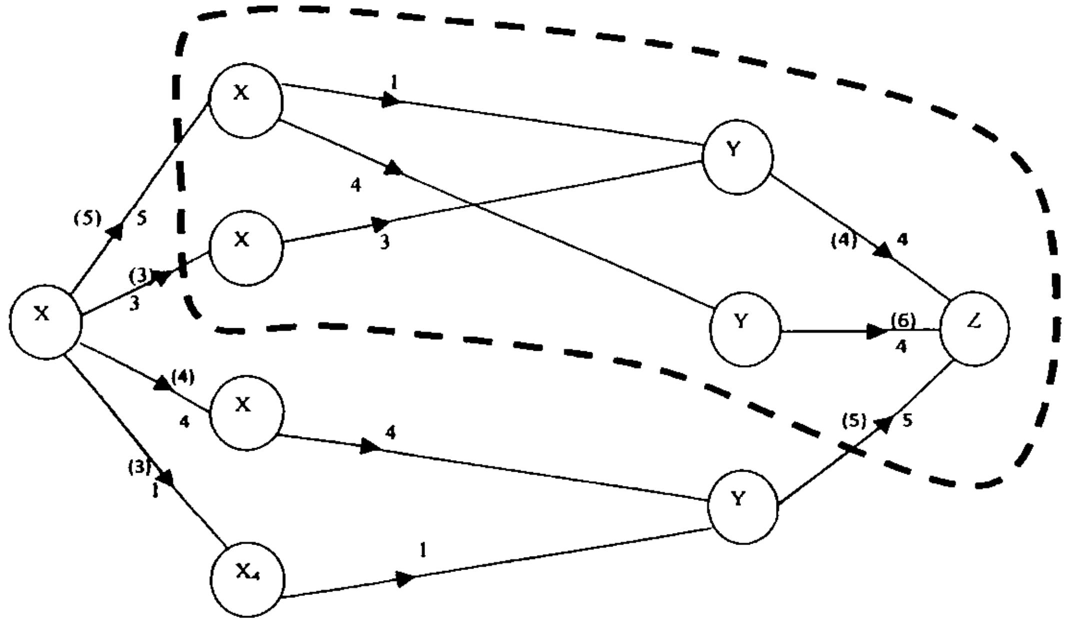

Figura N° 9

Los nuevos t_{ij} son

$t_{11} = 4$

$t_{12} = 3$

$t_{13} = 2$

$t_{21} = 5$

$t_{22} = 1$

$t_{32} = 3$

$t_{33} = 4$

$t_{41} = 2$

$t_{43} = 3$

$\alpha_1 + \beta_1 = t_{11}$	$\Rightarrow$	$1 + 3 =$	4	*
$\alpha_1 + \beta_2 = t_{12}$	$\Rightarrow$	$1 + 2 =$	3	*
$\alpha_1 + \beta_3 = t_{13}$	$\Rightarrow$	$1 + 2 \neq$	2	
$\alpha_2 + \beta_1 = t_{21}$	$\Rightarrow$	$3 + 2 =$	5	*
$\alpha_2 + \beta_2 = t_{22}$	$\Rightarrow$	$2 + 2 \neq$	1	
$\alpha_3 + \beta_2 = t_{32}$	$\Rightarrow$	$2 + 2 \neq$	3	
$\alpha_3 + \beta_3 = t_{33}$	$\Rightarrow$	$2 + 2 =$	4	*
$\alpha_4 + \beta_1 = t_{41}$	$\Rightarrow$	$1 + 3 \neq$	2	
$\alpha_4 + \beta_3 = t_{43}$	$\Rightarrow$	$1 + 2 =$	3	*

Los arcos del nuevo corte son (1 1) (1 2) (2 1) (3 3) y (4 3)

En R tenemos que $v(\psi\quad) = 13 < 15 = \sum_j b_j$ y el corte correspondiente da la posibilidad de obtener el nuevo presupuesto minimal

$$\alpha_i = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } x_i \in T \\ \alpha_i \quad 1 & \text{si } x_i \notin T \end{cases} \qquad \beta_j = \begin{cases} \beta_j & \text{si } y_j \in T \\ \beta_j + 1 & \text{si } y_j \notin T \end{cases}$$

$\alpha_1 =$ 1 pues $x_1 \in T$ $\qquad$ $\beta_1 = 2 + 1 = 3$ pues $y_1 \notin T$

$\alpha_2 = 3 - 1 = 2$ pues $x_2 \notin T$ $\beta_2 = 2$ pues $y_1 \in T$

$\alpha_3 = 2$ pues $x_3 \in T$ $\beta_3 = 2$ pues $y_3 \in T$

$\alpha_4 = 2 - 1 = 1$ pues $x_4 \notin T$

Ası el nuevo presupuesto γ estara compuesto por

$\alpha_1 = 1$ $\beta_1 = 3$

$\alpha_2 = 2$ $\beta_2 = 2$

$\alpha_3 = 1$ $\beta_3 = 3$

$\alpha_4 = 0$

Y la red parcıal R se muestra en la figura N 10

$\alpha_1 + \beta_1 = t_{11}$	$\Rightarrow$	$1 + 3$	$=$	4	*
$\alpha_1 + \beta_2 = t_{12}$	$\Rightarrow$	$1 + 2$	$=$	3	*
$\alpha_1 + \beta_3 = t_{13}$	$\Rightarrow$	$1 + 3$	$\neq$	2	
$\alpha_2 + \beta_1 = t_{21}$	$\Rightarrow$	$2 + 3$	$=$	5	*
$\alpha_2 + \beta_2 = t_{22}$	$\Rightarrow$	$2 + 2$	$\neq$	1	
$\alpha_3 + \beta_2 = t_{32}$	$\Rightarrow$	$1 + 2$	$=$	3	*
$\alpha_3 + \beta_3 = t_{33}$	$\Rightarrow$	$1 + 3$	$=$	4	*

$\alpha_4 + \beta_1 = t_{41} \quad \Rightarrow \quad 0 + 3 \neq 2$

$\alpha_4 + \beta_3 = t_{43} \quad \Rightarrow \quad 0 + 3 = 3$

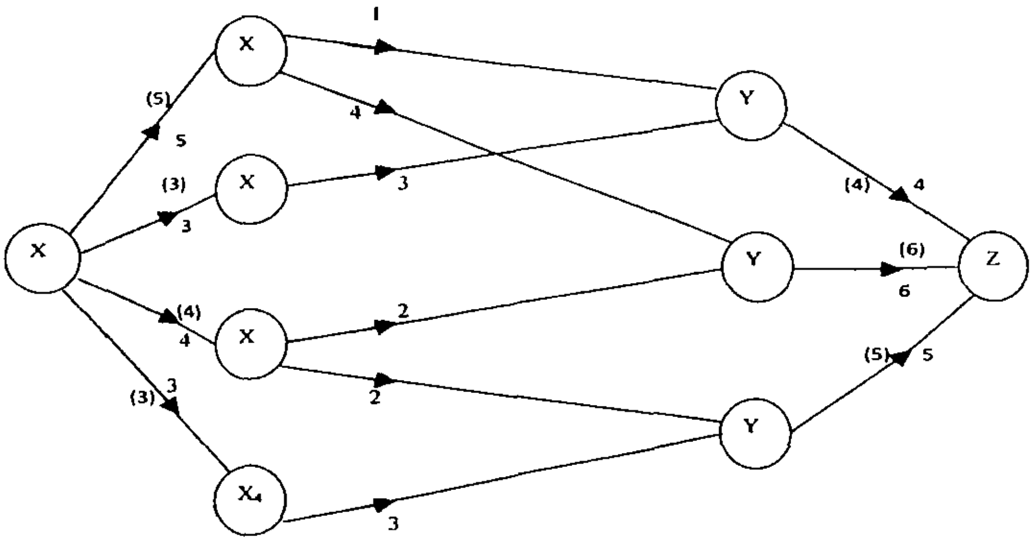

Figura N° 10

Los arcos que forman la nueva red seran (1 1) (1 2) (2 1) (3 2) (3 3) (4 3)

El flujo ψ cuyas componentes se anotan en la figura satura todos los arcos de salida, luego

$$\varphi(u) = \begin{cases} \psi\ (u) & \text{cuando u es un arco de R} \\ \\ 0 & \text{cuando u no es un arco de R} \end{cases}$$

CONCLUSIONES

CONCLUSIONES

A manera de conclusion se hace referencia a los aspectos mas importantes de este trabajo

El Algoritmo de Transporte en la Programacion Lineal es en realidad un caso particular del Algoritmo Simplex Se trata de un cambio de formato que se hace posible por la estructura particular que tiene el mismo planteamiento expresado como un problema de la Programacion Lineal

El examen del problema de tipo transporte planteado en el contexto de la teoria de grafos es ilustrativo porque ofrece la oportunidad de ver temas teoricos como la busqueda del presupuesto minimo o del flujo maximal asi como la comparacion entre el valor del flujo y la capacidad del corte en una red Se trata de un escenario alternativo y agradable para el tratamiento del problema

El enfoque presentado al Problema de Transporte por la Teoria de Grafos utilizando el algoritmo del presupuesto minimal desde el punto de vista docente es mas didactico pues a traves de cada grafo se visualiza graficamente que va a ocurrir en un futuro bajo el supuesto de las condiciones dadas permitiendo el estudio de alternativas para replantear diferentes politicas a optimizar

En los Problemas de Hitchcock para inventario ilimitado se debe encontrar el flujo que sature todos los arcos de salida de manera que se pueda llegar a un presupuesto optimo de forma mas rapida

RECOMENDACIONES

RECOMENDACIONES

Al finalizar este trabajo se desea recomendar lo siguiente

Dado que Panama se caracteriza por una economia de servicio donde el tránsito tiene un peso indiscutible recomendamos que la Programacion Lineal y la Teoria de Grafos sean cursos prevalecientes en todas las carreras que estan comprometidas con el desarrollo tecnico y cientifico del pais de manera que en el perfil de los egresados esten presentes capacidades basicas para resolver problemas de busqueda de soluciones optimas respetando las posibilidades para tal accion y dentro de esto la capacidad para apoyar la busqueda de soluciones en problemas de tipo transporte cuyas aplicaciones abarcan mucho mas que los problemas de transito y transporte terrestre

Las autoridades y empresas involucradas en la resolucion del Problema de Transporte en Panama deben consultar opiniones o planteamientos basicos en las Universidades estatales que contienen en sus curricula el tema del problema de transporte Esto permitiria, por ejemplo lograr una vision global de nuestro problema de transporte rural y urbano con lo que se revelarian con mayor precision necesidades de mejoras en los flujos de estructuras viales existentes y de nuevas rutas asi como tambien se harian mas facil las proyecciones de necesidades futuras a mediano y largo plazo que es lo que se necesita para atender al problema de transporte de manera sostenida

Cuando en una red asociada a un presupuesto minimal existen varios cortes con capacidad igual al valor del flujo maximal es recomendable elegir el que contenga menos vertices del nodo origen y mas vertices del nodo destino Esto permitira aproximarse mas rapido al presupuesto minimal

BIBLIOGRAFIA

BIBLIOGRAFIA

[1] Berge Claude TEORIA GRAFURILOR SI APLICATIILE EI Editura Tehnica Nouveau Tirage Bucaresti 1996

[2] Tiberiu Ionescu GRAFURI APLICATII Vol II Editura Didactica Si Pedagogica Bucaresti 1974

[3] Vaduva, I Dinescu C Savulescu B MODELE MATEMATICE DE ORGANIZAREA SI CONDUCEREA PRODUCTIEI Vol I Editura Didactica Si Pedagogica Bucaresti 1974

[4] Mircea, Malita, Corneliu Zidaroiu MATEMATICA ORGANIZARII Editura Technica Bucaresti 1975

[5] Taha, Hamdy A INVESTIGACION DE OPERACIONES UNA INTRODUCCION Sexta edicion Prentice Hall Mexico 1998

[6] Kaufmann A METODOS Y MODFLOS DE LA INVESTIGACION DE OPERACIONES Compania Editorial Continental S A Mexico 1998

[7] Hillier Frederick S Lieberman Gerald J INTRODUCCION A LA INVESTIGACION DE OPERACIONES Quinta Edicion McGraw – Hill Mexico 1991

[8] Bazaraa, Mokhtar S Jarvis John J PROGRAMACION LINEAL Y FLUJO EN REDES Editorial limusa Mexico 1981

[9] Bronson Richard INVESTIGACION DE OPERACIONES McGraw – Hill Mexico 1994

ANEXO

Anexo A

En la figura N° 1 aparece la red **R** que modela un problema de transporte Los datos estan inscritos en los arcos las capacidades entre paréntesis y los numeros v_j en los rombos

Para introducir un presupuesto se proponen las cantidades

$\alpha_1 = 4$ $\alpha_2 = 4$ $\alpha_3 = 4$ $\alpha_4 = 3$ $\alpha_5 = 4$

$\beta_1 = 2$ $\beta_2 = 1$ $\beta_3 = 2$ $\beta_4 = 2$

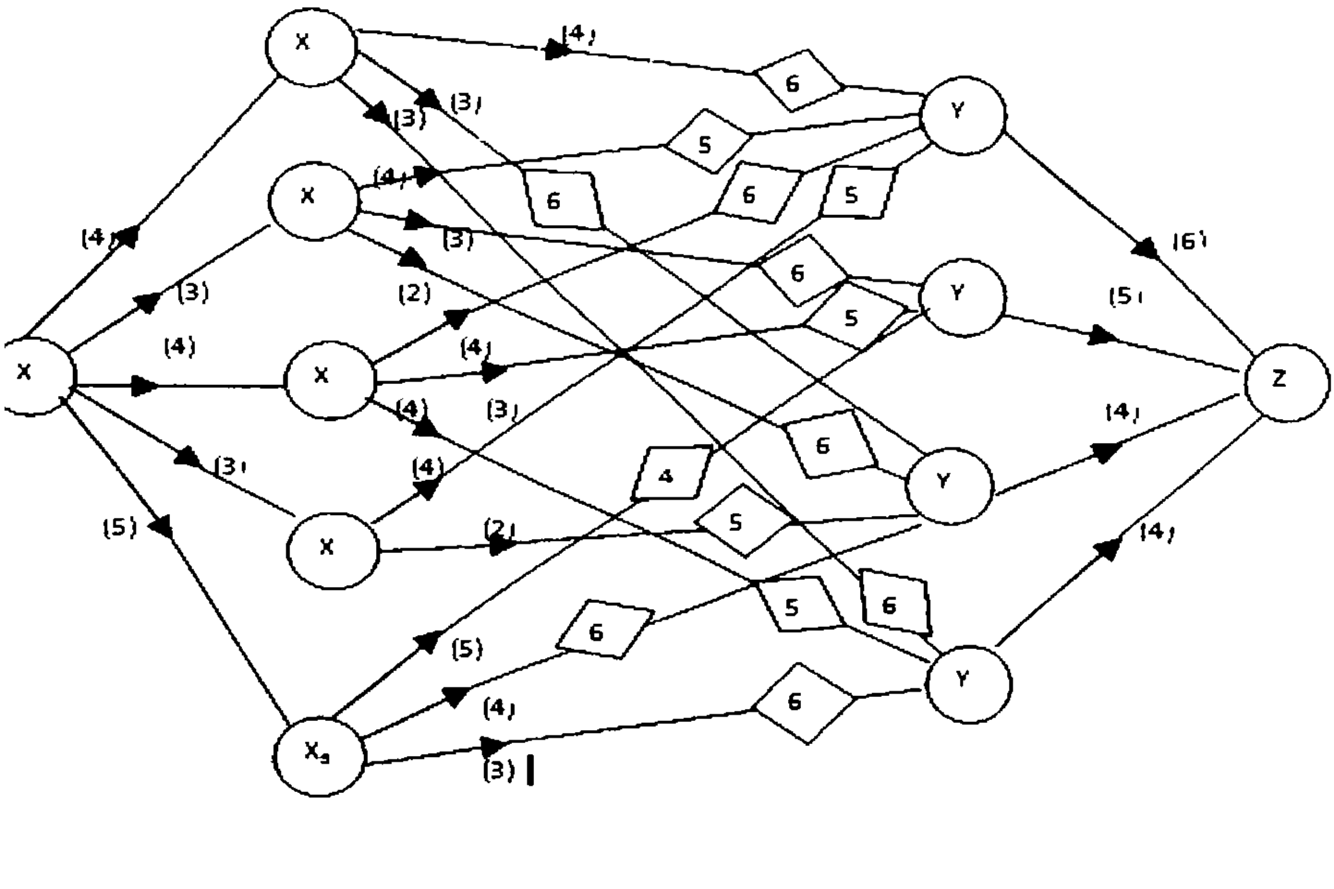

Figura N 1

Con la fórmula $\max \{0 \;\; v_j - \alpha - \beta_j\}$ se obtienen los γ_{ij}

(1 1) =	$\max \{0 \;\; v_{11} - \alpha_1 - \beta_1\}$ =	$\max \{0 \;\; 6 - 4 \;\; 2\}$ =	$\max \{0 \; 0\} = 0$
(1 2) =	$\max \{0 \;\; v_{12} - \alpha_1 - \beta_2\}$ =	$\max \{0 \;\; \emptyset\}$ =	no hay
(1 3) =	$\max \{0 \;\; v_{13} - \alpha_1 - \beta_3\}$ =	$\max \{0 \;\; 6 - 4 \;\; 2\}$ =	$\max \{0 \; 0\} = 0$
(1 4) =	$\max \{0 \;\; v_{14} - \alpha_1 - \beta_4\}$ =	$\max \{0 \;\; 6 - 4 \;\; 2\}$ =	$\max \{0 \; 0\} = 0$
(2 1) =	$\max \{0 \;\; v_{21} - \alpha_2 - \beta_1\}$ =	$\max \{0 \;\; 5 - 4 \;\; 2\}$ =	$\max \{0 \;\; 1\} = 0$
(2 2) =	$\max \{0 \;\; v_{22} - \alpha_2 - \beta_2\}$ =	$\max \{0 \;\; 6 - 4 \;\; 1\}$ =	$\max \{0 \; 1\} = 1$
(2 3) =	$\max \{0 \;\; v_{23} - \alpha_2 - \beta_3\}$ =	$\max \{0 \;\; 5 - 4 \;\; 2\}$ =	$\max \{0 \;\; 1\} = 0$
(2 4) =	$\max \{0 \;\; v_{24} - \alpha_2 - \beta_4\}$ =	$\max \{0 \;\; \emptyset\}$ =	no hay
(3 1) =	$\max \{0 \;\; v_{31} - \alpha_3 - \beta_1\}$ =	$\max \{0 \;\; 6 - 4 \;\; 2\}$ =	$\max \{0 \; 0\} = 0$
(3 2) =	$\max \{0 \;\; v_{32} - \alpha_3 - \beta_2\}$ =	$\max \{0 \;\; 5 - 4 \;\; 1\}$ =	$\max \{0 \; 0\} = 0$
(3 3) =	$\max \{0 \;\; v_{33} - \alpha_3 - \beta_3\}$ =	$\max \{0 \;\; \emptyset\}$ =	no hay
(3 4) =	$\max \{0 \;\; v_{34} - \alpha_3 - \beta_4\}$ =	$\max \{0 \;\; 5 - 4 \;\; 2\}$ =	$\max \{0 \;\; 1\} = 0$
(4 1) =	$\max \{0 \;\; v_{41} - \alpha_4 - \beta_1\}$ =	$\max \{0 \;\; 5 - 3 \;\; 2\}$ =	$\max \{0 \; 0\} = 0$
(4 2) =	$\max \{0 \;\; v_{42} - \alpha_4 - \beta_2\}$ =	$\max \{0 \;\; \emptyset\}$ =	no hay
(4 3) =	$\max \{0 \;\; v_{43} - \alpha_4 - \beta_3\}$ =	$\max \{0 \;\; 5 - 3 \;\; 2\}$ =	$\max \{0 \;\; 0\} = 0$
(4 4) =	$\max \{0 \;\; v_{44} - \alpha_4 - \beta_4\}$ =	$\max \{0 \;\; \emptyset\}$ =	no hay
(5 1) =	$\max \{0 \;\; v_{51} - \alpha_5 - \beta_1\}$ =	$\max \{0 \;\; \emptyset\}$ =	no hay
(5 2) =	$\max \{0 \;\; v_{52} - \alpha_5 - \beta_2\}$ =	$\max \{0 \;\; 4 - 4 \;\; 1\}$ =	$\max \{0 \;\; 1\} = 0$
(5 3) =	$\max \{0 \;\; v_{53} - \alpha_5 - \beta_3\}$ =	$\max \{0 \;\; 6 - 4 \;\; 2\}$ =	$\max \{0 \;\; 0\} = 0$

$(5\ 4) = \quad \max\ \{0\ \ v_{54} - \alpha_5 - \beta_4\} = \quad \max\ \{0\ \ 6 - 4\ \ 2\} = \quad \max\ \{0\ \ 0\} = 0$

$\gamma_j =$

	$\beta_1 = 2$	$\beta_2 = 1$	$\beta_3 = 2$	$\beta_4 = 2$	
	0		0	0	$\alpha_1 = 4$
	0*	1	0 *		$\alpha_2 = 4$
	0	0		0*	$\alpha_3 = 4$
	0		0		$\alpha_4 = 3$
		0*	0	0	$\alpha_5 = 4$

Tablero N° 6

Anexo B

Los calculos para el nuevo presupuesto que se obtiene es

$\alpha_1 = min\, v_{1j} = \{v_{11} \quad v_{13} \quad v_{14}\} \quad = min\{6\ 6\ 6\} = 6$

$\alpha_2 = min\, v_{2j} = \{v_{21} \quad v_{22} \quad v_{23}\} \quad = min\{5\ 6\ 5\} = 5$

$\alpha_3 = min\, v_{3j} = \{v_{31} \quad v_{32} \quad v_{34}\} \quad = min\{6\ 5\ 5\} = 5$

$\alpha_4 = min\, v_{4j} = \{v_{41} \quad v_{43}\} \quad = min\{5\ 5\} = 5$

$\alpha_5 = min\, v_{5j} = \{v_{52} \quad v_{53} \quad v_{54}\} \quad = min\{4\ 6\ 6\} = 4$

$$\beta_1 = max \begin{cases} (v_{11} - \alpha_1) = 6 - 6 = 0 \\ (v_{21} - \alpha_2) = 5 - 5 = 0 \\ (v_{31} - \alpha_3) = 6 - 5 = 1 \\ (v_{41} - \alpha_4) = 5 - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\beta_2 = max \begin{cases} (v_{22} - \alpha_2) = 6 - 5 = 1 \\ (v_{32} - \alpha_3) = 5 - 5 = 0 \\ (v_{52} - \alpha_5) = 4 - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\beta_3 = max \begin{cases} (v_{23} - \alpha_2) = 5 - 5 = 0 \\ (v_{43} - \alpha_4) = 5 - 5 = 0 \\ (v_{53} - \alpha_5) = 6 - 4 = 2 \end{cases}$$

$$\beta_4 = max \begin{cases} (v_{14} - \alpha_1) = 6 - 6 = 0 \\ (v_{34} - \alpha_3) = 5 - 5 = 0 \\ (v_{54} - \alpha_5) = 6 - 4 = 2 \end{cases}$$

Es decir

$\alpha_1 = 6$ $\alpha_2 = 5$ $\alpha_3 = 5$ $\alpha_4 = 5$ $\alpha_5 = 4$

$\beta_1 = 1$ $\beta_2 = 1$ $\beta_3 = 2$ $\beta_4 = 2$

$\gamma_{ij} =$

	$\beta_1 = 2$	$\beta_2 = 1$	$\beta_3 = 2$	$\beta_4 = 2$	
	0*		0*	0*	$\alpha_1 = 6$
	0*	0	0*		$\alpha_2 = 5$
	0	0*		0*	$\alpha_3 = 5$
	0*		0*		$\alpha_4 = 5$
		0*	0	0	$\alpha_5 = 4$

Tablero N° 7

Los calculos para encontrar los nuevos $\gamma_{ij} = \max\ \{0\ \ v_{ij} - \alpha - \beta_j\}$son

$\gamma_{11} =$ $\max\ \{0\ \ v_{11} - \alpha_1 - \beta_1\} =$ $\max\ \{0\ \ 6 - 6\ \ 1\} =$ $\max\ \{0\ \ 1\} = 0$

$\gamma_{12} =$ $\max\ \{0\ \ v_{12} - \alpha_1 - \beta_2\} =$ $\max\ \{0\ \ \emptyset\} =$ no hay

$\gamma_{13} =$ max $\{0\ \ v_{13} - \alpha_1 - \beta_3\}$ = max $\{0\ \ 6 - 6\ \ 2\}$ = max $\{0\ \ 2\} = 0$

$\gamma_{14} =$ max $\{0\ \ v_{14} - \alpha_1 - \beta_4\}$ = max $\{0\ \ 6 - 6\ \ 2\}$ = max $\{0\ \ 2\} = 0$

$\gamma_{21} =$ max $\{0\ \ v_{21} - \alpha_2 - \beta_1\}$ = max $\{0\ \ 5 - 4\ \ 2\}$ = max $\{0\ \ 1\} = 0$

$\gamma_{22} =$ max $\{0\ \ v_{22} - \alpha_2 - \beta_2\}$ = max $\{0\ \ 6 - 5\ \ 1\}$ = max $\{0\ 0\} = 0$

$\gamma_{23} =$ max $\{0\ \ v_{23} - \alpha_2 - \beta_3\}$ = max $\{0\ \ 5 - 5\ \ 2\}$ = max $\{0\ \ 2\} = 0$

$\gamma_{24} =$ max $\{0\ \ v_{24} - \alpha_2 - \beta_4\}$ = max $\{0\ \ \emptyset\}$ = no hay

$\gamma_{31} =$ max $\{0\ \ v_{31} - \alpha_3 - \beta_1\}$ = max $\{0\ \ 6 - 5\ \ 1\}$ = max $\{0\ 0\} = 0$

$\gamma_{32} =$ max $\{0\ \ v_{32} - \alpha_3 - \beta_2\}$ = max $\{0\ \ 5 - 5\ \ 1\}$ = max $\{0\ \ 1\} = 0$

$\gamma_{33} =$ max $\{0\ \ v_{33} - \alpha_3 - \beta_3\}$ = max $\{0\ \ \emptyset\}$ = no hay

$\gamma_{34} =$ max $\{0\ \ v_{34} - \alpha_3 - \beta_4\}$ = max $\{0\ \ 5 - 5\ \ 2\}$ = max $\{0\ \ 2\} = 0$

$\gamma_{41} =$ max $\{0\ \ v_{41} - \alpha_4 - \beta_1\}$ = max $\{0\ \ 5 - 5\ \ 1\}$ = max $\{0\ \ 1\} = 0$

$\gamma_{42} =$ max $\{0\ \ v_{42} - \alpha_4 - \beta_2\}$ = max $\{0\ \ \emptyset\}$ = no hay

$\gamma_{43} =$ max $\{0\ \ v_{43} - \alpha_4 - \beta_3\}$ = max $\{0\ \ 5 - 5\ \ 2\}$ = max $\{0\ \ 2\} = 0$

$\gamma_{44} =$ max $\{0\ \ v_{44} - \alpha_4 - \beta_4\}$ = max $\{0\ \ \emptyset\}$ = no hay

$\gamma_{51} =$ max $\{0\ \ v_{51} - \alpha_5 - \beta_1\}$ = max $\{0\ \ \emptyset\}$ = no hay

$\gamma_{52} =$ max $\{0\ \ v_{52} - \alpha_5 - \beta_2\}$ = max $\{0\ \ 4 - 4\ \ 1\}$ = max $\{0\ \ 1\} = 0$

$\gamma_{53} =$ max $\{0\ \ v_{53} - \alpha_5 - \beta_3\}$ = max $\{0\ \ 6 - 4\ \ 2\}$ = max $\{0\ \ 0\} = 0$

$\gamma_{54} =$ max $\{0\ \ v_{54} - \alpha_5 - \beta_4\}$ = max $\{0\ \ 6 - 4\ \ 2\}$ = max $\{0\ \ 0\} = 0$

Anexo C

Los calculos para el nuevo presupuesto que se obtiene es

$$\alpha_i = \begin{cases} \alpha_i & si\, x_i \in T \\ \alpha_i - 1 & si\, \alpha_i \notin \mathrm{T} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\alpha_1 = \{6 - 1\ porque\ x_1 \notin \mathrm{T}\} = 5}$$

$$\boldsymbol{\alpha_2 = \{5 - 1\ porque\ x_2 \notin \mathrm{T}\} = 4}$$

$$\boldsymbol{\alpha_3 = \{5 - 1\ porque\ x_3 \notin \mathrm{T}\} = 4}$$

$$\boldsymbol{\alpha_4 = \{5 - 1\ porque\ x_4 \notin \mathrm{T}\} = 4}$$

$$\boldsymbol{\alpha_5 = \{4 \quad porque\ x_5 \in T\} = 4}$$

$$\beta_j = \begin{cases} \beta_j & si\, y_j \in T \\ \beta_j - 1 & si\, \beta_j \notin \mathrm{T} \end{cases}$$

$\alpha_1 = 5$ $\alpha_2 = 4$ $\alpha_3 = 4$ $\alpha_4 = 4$ $\alpha_5 = 4$

$\beta_1 = 1$ $\beta_2 = 1$ $\beta_3 = 2$ $\beta_4 = 2$

$\beta_1 = 1 \quad \beta_2 = 1 \quad \beta_3 = 2 \quad \beta_4 = 2$

α_{ij} =

0		0*	0*	$\alpha_1 = 5$
0	1	0*		$\alpha_2 = 4$
1	0		0*	$\alpha_3 = 4$
0		0*		$\alpha_4 = 4$
	0*	0	0	$\alpha_5 = 4$

Tablero N° 8

Los calculos para encontrar los nuevos $\gamma_{ij} = \max\,\{0 \;\; v_j - \alpha - \beta_j\}$ son

$\gamma_{11} = \quad \max\,\{0 \;\; v_{11} - \alpha_1 - \beta_1\} = \quad \max\,\{0 \;\; 6 - 6 \;\; 1\} = \quad \max\,\{0 \;\; 1\} = 0$

$\gamma_{12} = \quad \max\,\{0 \;\; v_{12} - \alpha_1 - \beta_2\} = \quad \max\,\{0 \;\; \emptyset\} =$ no hay

$\gamma_{13} = \quad \max\,\{0 \;\; v_{13} - \alpha_1 - \beta_3\} = \quad \max\,\{0 \;\; 6 - 6 \;\; 2\} = \quad \max\,\{0 \;\; 2\} = 0$

$\gamma_{14} = \quad \max\,\{0 \;\; v_{14} - \alpha_1 - \beta_4\} = \quad \max\,\{0 \;\; 6 - 6 \;\; 2\} = \quad \max\,\{0 \;\; 2\} = 0$

$\gamma_{21} = \quad \max\,\{0 \;\; v_{21} - \alpha_2 - \beta_1\} = \quad \max\,\{0 \;\; 5 - 4 \;\; 2\} = \quad \max\,\{0 \;\; 1\} = 0$

$\gamma_{22} = \quad \max\,\{0 \;\; v_{22} - \alpha_2 - \beta_2\} = \quad \max\,\{0 \;\; 6 - 5 \;\; 1\} = \quad \max\,\{0\,0\} = 0$

$\gamma_{23} = \quad \max\,\{0 \;\; v_{23} - \alpha_2 - \beta_3\} = \quad \max\,\{0 \;\; 5 - 5 \;\; 2\} = \quad \max\,\{0 \;\; 2\} = 0$

$\gamma_{24} = \quad \max\,\{0 \;\; v_{24} - \alpha_2 - \beta_4\} = \quad \max\,\{0 \;\; \emptyset\} =$ no hay

$\gamma_{31} =$ max $\{0 \;\; v_{31} - \alpha_3 - \beta_1\}$ = max $\{0 \;\; 6 - 5 \;\; 1\}$ = max $\{0 \; 0\} = 0$

$\gamma_{32} =$ max $\{0 \;\; v_{32} - \alpha_3 - \beta_2\}$ = max $\{0 \;\; 5 - 5 \;\; 1\}$ = max $\{0 \;\; 1\} = 0$

$\gamma_{33} =$ max $\{0 \;\; v_{33} - \alpha_3 - \beta_3\}$ = max $\{0 \;\; \emptyset\}$ = no hay

$\gamma_{34} =$ max $\{0 \;\; v_{34} - \alpha_3 - \beta_4\}$ = max $\{0 \;\; 5 - 5 \;\; 2\}$ = max $\{0 \;\; 2\} = 0$

$\gamma_{41} =$ max $\{0 \;\; v_{41} - \alpha_4 - \beta_1\}$ = max $\{0 \;\; 5 - 5 \;\; 1\}$ = max $\{0 \;\; 1\} = 0$

$\gamma_{42} =$ max $\{0 \;\; v_{42} - \alpha_4 - \beta_2\}$ = max $\{0 \;\; \emptyset\}$ = no hay

$\gamma_{43} =$ max $\{0 \;\; v_{43} - \alpha_4 - \beta_3\}$ = max $\{0 \;\; 5 - 5 \;\; 2\}$ = max $\{0 \;\; 2\} = 0$

$\gamma_{44} =$ max $\{0 \;\; v_{44} - \alpha_4 - \beta_4\}$ = max $\{0 \;\; \emptyset\}$ = no hay

$\gamma_{51} =$ max $\{0 \;\; v_{51} - \alpha_5 - \beta_1\}$ = max $\{0 \;\; \emptyset\}$ = no hay

$\gamma_{52} =$ max $\{0 \;\; v_{52} - \alpha_5 - \beta_2\}$ = max $\{0 \;\; 4 - 4 \;\; 1\}$ = max $\{0 \;\; 1\} = 0$

$\gamma_{53} =$ max $\{0 \;\; v_{53} - \alpha_5 - \beta_3\}$ = max $\{0 \;\; 6 - 4 \;\; 2\}$ = max $\{0 \;\; 0\} = 0$

$\gamma_{54} =$ max $\{0 \;\; v_{54} - \alpha_5 - \beta_4\}$ = max $\{0 \;\; 6 - 4 \;\; 2\}$ = max $\{0 \;\; 0\} = 0$